

Giochi di Archimede 2017

Soluzioni gara triennio (versione T1)

- (1) La risposta corretta è (B).

Poiché l'unico divisore primo di 2^{24} è 2, il numero m deve essere una potenza di 2. Se $m = 2^k$, allora $m^n = (2^k)^n = 2^{kn}$ e $kn = 24$. Le uniche scelte per n sono gli otto divisori di 24: $n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$, che corrispondono ai valori $m = 2^{24}, 2^{12}, 2^8, 2^6, 2^4, 2^3, 2^2, 2$, rispettivamente. Problema proposto da Alberto Bucci.

- (2) La risposta corretta è (E).

Detta A l'età di Anna e M l'età di Mario, si ha $A - 6 = 5(M - 6)$, $A = 3M$, da cui $A = 36$, $M = 12$. La differenza tra le età è 24, e l'età di Anna sarà il doppio di quella di Mario quando Mario avrà 24 anni, cioè tra 12 anni.

Problema proposto da Paolo Negrini.

- (3) La risposta corretta è (C).

Il numero $10!$ è multiplo di 100, così come ogni $n!$ per $n > 10$. La cifra delle decine di H si ottiene allora sommando i primi nove termini $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9!$. Si ha:

$$1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5040 + 40320 + 362880 = 409113$$

e quindi la cifra delle decine di H è 1.

Problema proposto da Carmelo Di Stefano.

- (4) La risposta corretta è (A).

Se è presente almeno un cavaliere, tra i suoi due vicini e la persona di fronte ci sono esattamente due furfanti. Essendo i furfanti almeno due, e al più quattro se sono furfanti anche le altre due persone, i cavalieri sono due, tre o quattro. Inoltre ciascun cavaliere ha esattamente un vicino cavaliere **oppure** ha un cavaliere seduto esattamente di fronte, ma non entrambe le cose. Se i cavalieri sono esattamente due, devono essere seduti vicini oppure di fronte l'uno all'altro. Ma se sono seduti vicini, un furfante seduto in posizione opposta afferma la verità; se sono seduti in posizione opposta, un furfante vicino afferma la verità. Possiamo concludere che i cavalieri non sono esattamente due. Se i cavalieri sono esattamente tre, due di essi devono necessariamente essere seduti vicini, ma non tutti e tre, altrimenti un cavaliere avrebbe due vicini cavalieri. Il terzo cavaliere deve essere opposto ad uno dei due, ma allora uno dei primi due ha sia un cavaliere vicino che uno opposto. Possiamo quindi concludere che i cavalieri non sono esattamente tre. Se i cavalieri sono esattamente quattro, almeno due sono seduti vicini. Ma ciascuno di essi può avere al più un vicino cavaliere, e quindi gli altri due sono necessariamente seduti in posizione opposta. Ma allora ogni cavaliere ha sia un cavaliere vicino che uno opposto, e possiamo concludere che il numero dei cavalieri non è nemmeno quattro.

L'unica altra possibilità è che non ci siano cavalieri, e siano seduti al tavolo solo furfanti. In tal caso tutti mentono e la situazione è possibile.

Problema proposto da Matteo Protopapa.

- (5) La risposta corretta è (C).

Detto M il punto medio di AB , la misura (in cm) di EM è $\sqrt{3}$. Detto N il punto medio di GH , la misura di EN (che è l'altezza del triangolo equilatero EGH) è pari a $\sqrt{3} - 1$. I lati del triangolo EGH misurano quindi $(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$. Ne segue che l'area di $EGFH$ (che è il doppio di EGH) risulta (in cm^2) uguale a $(\sqrt{3} - 1)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$.

Problema proposto da Antonio Fanelli.

- (6) La risposta corretta è (E).

La bottiglia contiene inizialmente $99/4$ ml di acqua e $33/4$ ml di succo d'arancia. Dopo aver sostituito x ml di bibita con del succo d'arancia, la bibita conterrà $99/4 - 3x/4$ ml di acqua. Affinché l'acqua sia la metà del contenuto della bottiglia, deve essere $99/4 - 3x/4 = 33/2$, da cui $x = 11$.

Problema proposto da Carmelo Di Stefano.

- (7) La risposta corretta è (A).

Indichiamo con x_k l'ultimo numero rimasto dopo aver proceduto come descritto con i numeri tra 1 e 2^k . Se si procede con i numeri tra 1 e 2^{k+1} , al primo passaggio rimangono solo i 2^k numeri pari, e i successivi k passaggi selezionano il numero pari di posizione x_k , contando però dal fondo. Pertanto, $x_{k+1} = 2(2^k - x_k + 1) = 2^{k+1} - 2x_k + 2$.

Sapendo che $x_0 = 1$, si ottiene rapidamente

$$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = 6, x_5 = 22, x_6 = 22, x_7 = 86.$$

Problema proposto da Antonio Fanelli.

- (8) La risposta corretta è (B).

Il prodotto di a e b è $1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Poiché $MCD(a, b) = 2$, uno dei due numeri avrà nella sua fattorizzazione un solo fattore 2, mentre l'altro ne avrà 2; gli altri fattori primi 3, 5, 11 sono presenti nel prodotto ab una sola volta, e non contribuiranno quindi al MCD ; possono essere distribuiti liberamente su uno dei due numeri o sull'altro. Le $2^3 = 8$ coppie di interi che si ottengono sono allora:

$$(2, 660), \quad (4, 330), \quad (6, 220), \quad (10, 132), \quad (12, 110), \quad (20, 66), \quad (22, 60), \quad (30, 44).$$

Problema proposto da Antonio Fanelli e da Riccardo Zanotto.

- (9) La risposta corretta è (B).

Poiché l'angolo \widehat{MLN} è uguale alla somma degli altri due angoli di LMN , segue che \widehat{MLN} è un angolo retto. Inoltre il punto P è il piede dell'altezza uscente da L , dal momento che $\widehat{LMP} + \widehat{MLP} = \widehat{LNP} + \widehat{NLP} = 90^\circ$. L'affermazione falsa è pertanto quella indicata dalla lettera (B). Infatti i due prodotti $MN \cdot LP$ e $LM \cdot LN$ corrispondono entrambi al doppio dell'area del triangolo e sono quindi uguali, mentre si può agevolmente verificare che le altre 4 affermazioni sono senz'altro vere.

Problema proposto da Lorenzo Furio.

- (10) La risposta corretta è (D).

In un'ora, la lancetta dei minuti percorre 360 gradi, mentre quella delle ore ne percorre 30. In un minuto percorrono quindi 6 gradi e mezzo grado rispettivamente, e quindi l'angolo tra le due lancette si allarga di $11/2$ gradi. Affinché l'angolo diventi di 180 gradi, dovranno passare $180/(11/2) = 360/11$ minuti, cioè 32 minuti e 44 secondi circa.

Problema proposto da Carmelo Di Stefano.

- (11) La risposta corretta è (E).

Luigi vince la partita solo nel caso in cui faccia un punto con tutti i quattro lanci successivi. Essendo i lanci degli eventi indipendenti, la sua probabilità di vittoria è $(1/2)^4 = 1/16$ e la probabilità che Silvia vinca è quindi $15/16$.

Problema proposto da Carmelo Di Stefano.

- (12) La risposta corretta è (C).

Dato che AG è la metà di AB , l'area del triangolo ACG è la metà di quella di ABC (infatti l'altezza condotta da C è la stessa per i due triangoli). Allo stesso modo, l'area di DEG è pari a $1/3$ dell'area di ACG . Pertanto l'area di DEG è pari a $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ dell'area del triangolo ABC .

Problema proposto da Matteo Protopapa.

(13) La risposta corretta è (E).

Gerardo arriva in semifinale se tutti e 15 gli altri partecipanti nel suo quarto di tabellone hanno punteggi più bassi del suo; per poter sperare di arrivare in semifinale con un sorteggio opportuno, il suo punteggio deve essere al più il 49°. Egli è inoltre certo di non arrivare in finale, il che vuol dire che non riesce a trovare 31 partecipanti con punteggio minore del suo: in altre parole, il suo punteggio è almeno il 34°.

Problema proposto da Matteo Rossi.

(14) La risposta corretta è (D).

Osserviamo per prima cosa che il raggio della circonferenza, che è la metà della diagonale del quadrato $ABCD$, ha lunghezza (in cm) uguale a $\sqrt{2}$. Indichiamo con O il centro della circonferenza. Supponiamo che $EFGH$ sia un quadrato inscritto nel segmento circolare delimitato da AB , con i vertici E, F sul lato AB e i vertici G, H sulla circonferenza. Sia M il punto medio di AB , che è punto medio anche di EF . Denotiamo con x la misura (sempre in cm) del lato del quadrato $EFGH$. Per il teorema di Pitagora si ha

$$(\overline{OM} + x)^2 + (x/2)^2 = \overline{OG}^2$$

vale a dire $(1 + x)^2 + (x/2)^2 = (\sqrt{2})^2$, da cui $5x^2 + 8x - 4 = 0$. Le soluzioni dell'equazione sono $2/5$ e -2 , pertanto deve essere $x = 2/5$.

Problema proposto da Matteo Rossi.

(15) La risposta corretta è (A).

I numeri primi di una cifra sono 2, 3, 5, 7. Ogni numero primo con la proprietà indicata dovrà quindi avere queste come sole cifre, perché cancellandole tutte tranne una si dovrà ottenere un numero primo.

Inoltre, 2 e 5, se presenti, potranno apparire solamente nella prima posizione; se così non fosse, cancellando tutte le cifre successive al 2 o al 5 si otterrebbe un numero pari o multiplo di 5 con almeno due cifre, che non può essere primo. In particolare, solo una cifra tra 2 e 5 può essere presente nel numero, ed esclusivamente nella prima posizione. Una cifra non può nemmeno essere presente più di una volta, altrimenti cancellando tutte le cifre tranne due uguali si otterrebbe un multiplo di 11, che non può essere primo.

Gli unici numeri di due cifre che soddisfano le condizioni appena descritte sono 23, 27, 37, 53, 57, 73. Di questi, solamente 23, 37, 53, 73 sono primi.

Per quanto riguarda i numeri con almeno tre cifre:

- Se non contengono né la cifra 2, né la cifra 5, sono composti solamente da cifre 3 e 7 e devono necessariamente avere cifre ripetute. Non possono quindi soddisfare le proprietà indicate.
- Se hanno 2 come prima cifra, non possono avere né 5 (che dovrebbe essere in prima posizione) né 7 (poiché 27 non è primo) come altre cifre. Ogni cifra successiva al 2 è quindi un 3, ma allora hanno necessariamente cifre ripetute e non possono quindi soddisfare le proprietà indicate.
- Allo stesso modo, se hanno 5 come prima cifra, ogni cifra successiva deve essere un 3, e sono necessariamente presenti cifre ripetute.

In conclusione, gli unici numeri che soddisfano la proprietà descritta sono 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73.

Problema proposto da Emanuele Tron.

(16) La risposta corretta è (C).

I quadrati che contengono la casella centrale sono:

- l'unico quadrato 7×7 ;
- tutti i 4 quadrati 6×6 ;
- tutti i 9 quadrati 5×5 ;
- tutti i 16 quadrati 4×4 ;
- i soli 9 quadrati 3×3 che non toccano il bordo esterno della griglia;
- i soli 4 quadrati 2×2 che evitano che condividono un vertice con la casella centrale;
- il quadrato 1×1 costituito dalla sola casella centrale.

In totale, si tratta di $1 + 4 + 9 + 16 + 9 + 4 + 1 = 44$ quadrati.

Problema proposto da Matteo Rossi.

(17) La risposta corretta è (E).

Caterina scrive i 4 numeri pari di una cifra, per un totale di 4 cifre. Poi i 45 numeri pari di due cifre, quelli tra 10 e 98, per un totale di 90 cifre. Scrive quindi i 450 numeri pari di tre cifre, quelli tra 100 e 998, per un totale di $3 \cdot 450 = 1350$ cifre. A questo punto, avrà scritto $4 + 90 + 1350 = 1444$ cifre, e rimarranno $2017 - 1444 = 573$ cifre da scrivere.

I numeri successivi sono di quattro cifre. Poiché $573 = 4 \cdot 143 + 1$, la cifra nella 2017^a posizione sarà la prima cifra del centoquarantaquattresimo numero pari di quattro cifre. Tale numero è 1286, e la sua prima cifra è 1.

Problema proposto da Carmelo Di Stefano.

(18) La risposta corretta è (D).

Poiché $2^5 = 32$ è maggiore della somma di 1, 2, 4, 8, 16, il segno di $p(2)$ coincide con il segno di a . Sapendo che $p(2) = 11 > 0$, a deve essere positivo, e quindi $a = 1$. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento per il polinomio $q(x) = p(x) - x^5 = bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$: poiché $q(2) = 11 - 32 = -21$, si avrà $b < 0$ e quindi $b = -1$. Continuando, si ottiene facilmente $p(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. A questo punto è immediato calcolare $p(3) = 3^5 - 3^4 - 3^3 + 3^2 - 3 + 1 = 243 - 81 - 27 + 9 - 3 + 1 = 142$. Problema proposto da Matteo Rossi.

(19) La risposta corretta è (A).

Il numero di zeri finali di un numero è il minimo tra l'esponente di 2 e quello di 5 nella sua fattorizzazione in primi. Iniziamo calcolando l'esponente di 5 presente nella fattorizzazione in primi di ciascun numero scritto, ricordando che in un prodotto gli esponenti si sommano. Sappiamo che nella prima riga gli esponenti di 5 sono 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, e quindi nella seconda 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0; nella terza 0, 0, 1, 2, 1, 0; nella quarta 0, 1, 3, 3, 1; nella quinta 1, 4, 6, 4; nella sesta 5, 10, 10; nella settima 15, 20; infine nell'ottava 35. Procedendo allo stesso modo con il primo 2, si vede facilmente che la potenza di 2 che divide l'ultimo numero è ben superiore a 2^{35} . Il numero scritto nel cerchio più in basso termina quindi con esattamente 35 zeri.

Problema proposto da Giovanni Barbarino.

(20) La risposta corretta è (B).

Osserviamo che \widehat{APM} è un angolo esterno al triangolo MPT , perciò $\widehat{APM} = \widehat{PMT} + \widehat{PTM}$. Dato che $\widehat{APM} = 2\widehat{PTM}$, segue che $\widehat{PMT} = \widehat{PTM}$. Il triangolo MPT è dunque isoscele e, visto che C è il piede della sua altezza, si ha $TC = CM = MB$, ossia TB è il triplo di TC . Per la similitudine dei triangoli TPC e TAB , anche AB sarà il triplo di CP . In conclusione, i lati del rettangolo $ABCD$ sono, rispettivamente, il doppio e il triplo dei cateti del triangolo rettangolo TPC . L'area di $ABCD$ è quindi pari a $2 \cdot (2 \cdot 3) = 12$ volte l'area di TPC .

Problema proposto da Camilla Casamento Tumeo.

N.B. Come d'abitudine, i problemi proposti sono stati, oltre che controllati e selezionati, in molti casi ampiamente modificati o riformulati dai responsabili della gara. Pertanto, nell'indicare i nominativi degli autori delle proposte, resta inteso che i responsabili sia della scelta dei quesiti, sia di eventuali errori, imprecisioni o formulazioni criticabili sono da individuarsi esclusivamente nei responsabili stessi della gara ed in nessuna misura negli autori delle proposte, che anzi vogliamo ringraziare per il loro notevole contributo, la ricchezza degli spunti offerti, l'originalità e la qualità delle proposte presentate.

I responsabili dei Giochi di Archimede,

Alessandro D'Andrea, Paolo Francini, Andrea Sambusetti