TULLIO LEVI CIVITA
e
L’ANALISI TENSORIALE

Tullio Levi Civita
(1873-1941)

"Spaghetti and Levi-Civita"
fu ciò che Einstein rispose alla domanda su cosa gli piacesse dell'Italia.

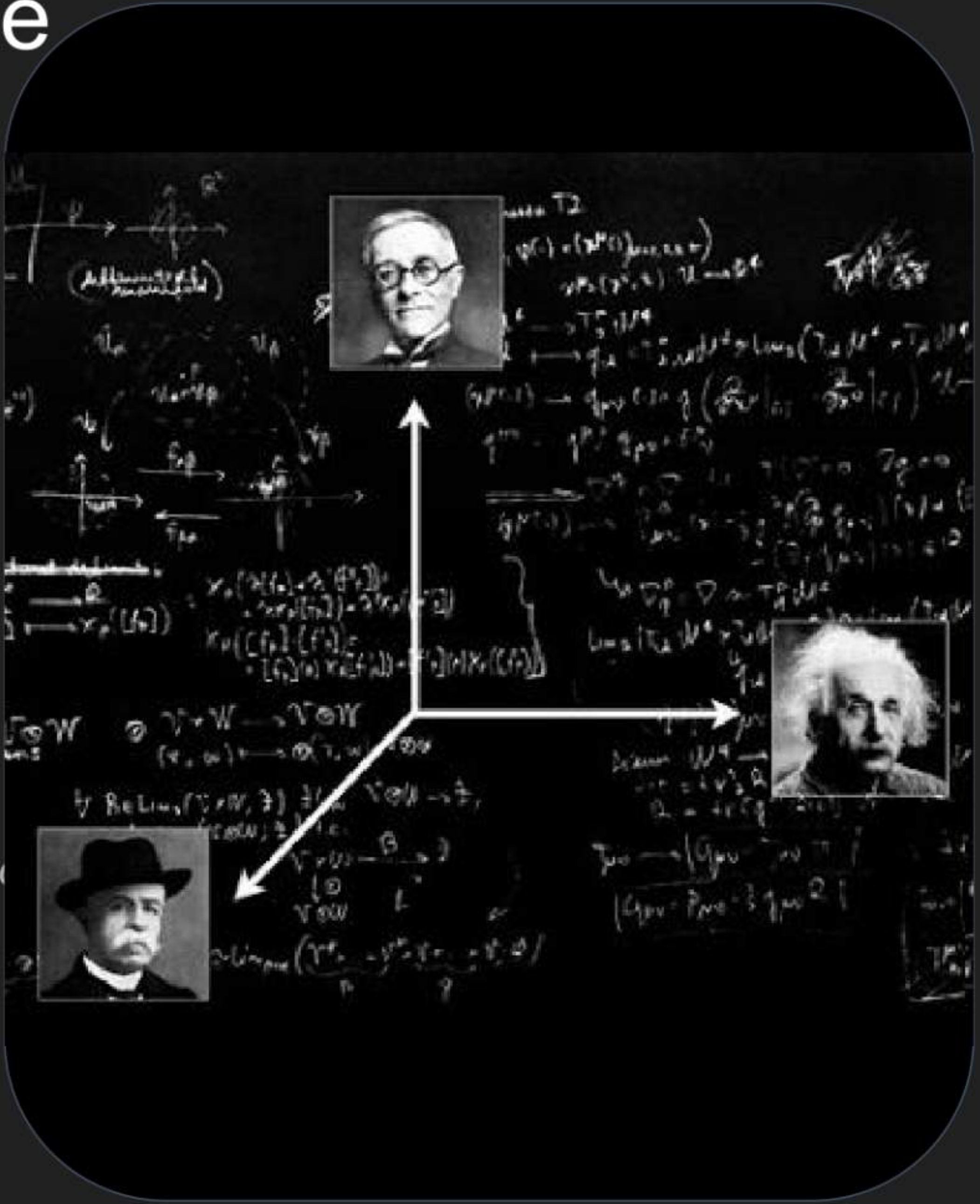
Introduzione all’analisi tensoriale

L’analisi tensoriale, anche se venne considerata come una branca innovativa della matematica, in realtà rappresentava una variazione di un tema già esistente, ovvero lo studio degli invarianti differenziali della geometria di Riemann (ovvero espressioni che mantengono la stessa forma e valore indipendentemente dal cambiamento di sistema di coordinate, ad esempio lunghezza di un arco di curva, curvatura) .

Tale geometria a sua volta si basava sul lavoro svolto da matematici precedenti, in particolare sulla geometria differenziale di Eulero e di Gauss.

Un nuovo approccio allo studio degli invarianti lo portò Ricci Curbastro. I risultati di tale ricerca vennero esposti in maniera esauriente in un articolo, *Metodi di calcolo differenziale assoluti e loro applicazioni*, al quale collaborò Levi Civita, suo allievo.

Solo nel 1916 con Einstein il calcolo differenziale assoluto divenne noto come *calcolo tensoriale*.

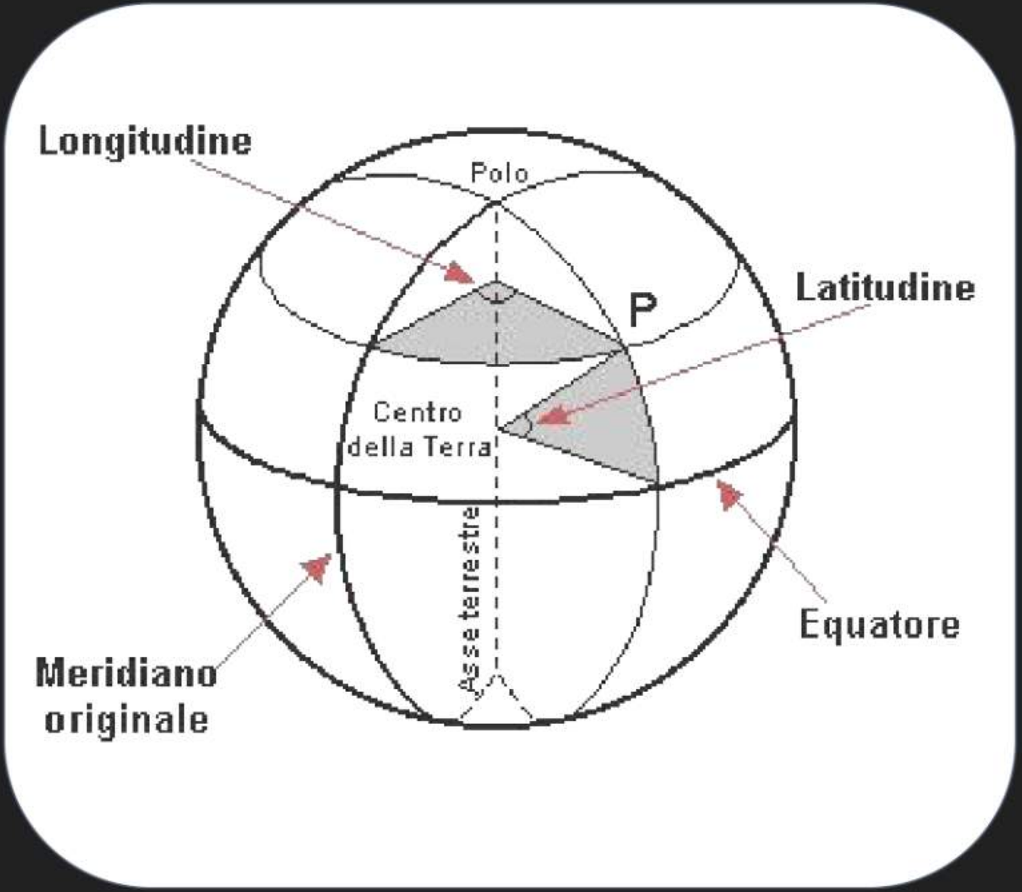


La geometria differenziale

La geometria differenziale fu fondata da Eulero il quale applicò il calcolo differenziale per descrivere le proprietà geometriche di curve e superfici.

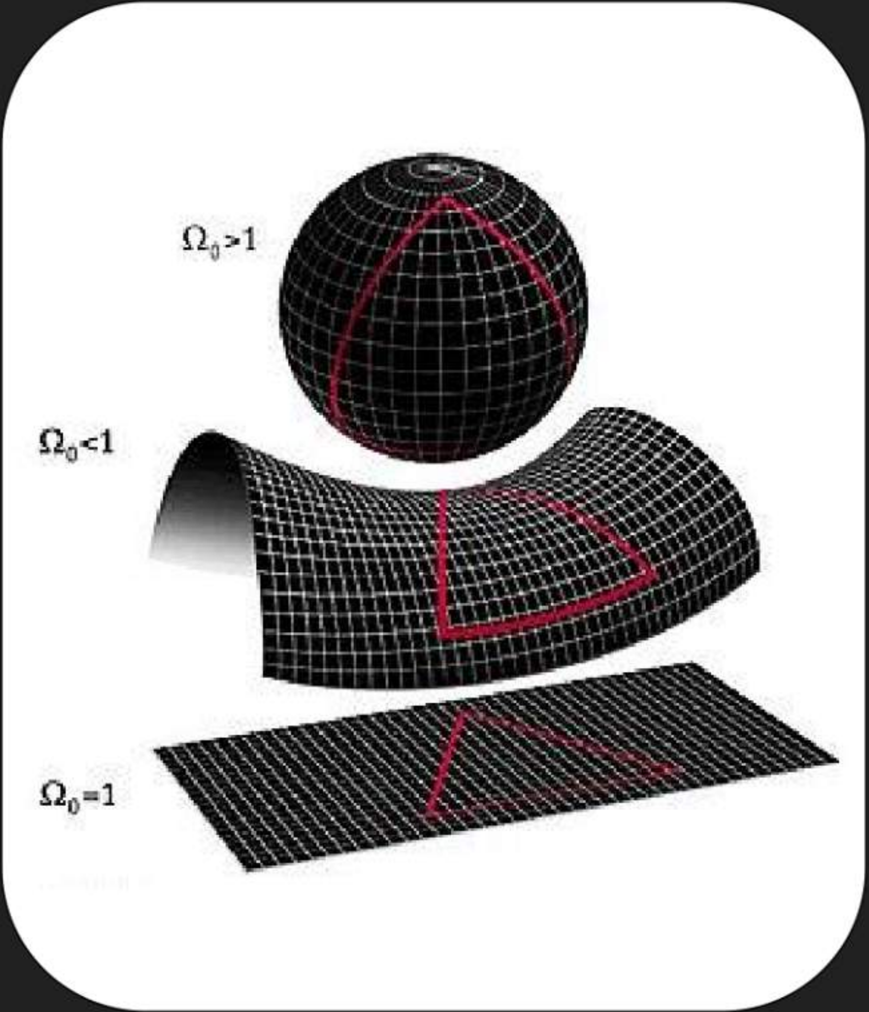
Gauss sviluppò l'idea di Eulero di rappresentare le superfici esprimendo le coordinate come funzioni di due parametri [x=x(u, v), y=y(u,v), z=z(u,v)].

Il vantaggio che dava tale descrizione a "coordinate intrinseche" era la possibilità di calcolare curvatura, distanze e altre proprietà, dall'interno della superficie, senza immergerla in uno spazio.



Gauss studiò un tipo particolare di geometria in cui non era soddisfatto il quinto postulato di Euclide. Tale tipo di geometria venne poi definita iperbolica da Bolyai e Lobacevskij.

Le geometrie non euclidee vennero però considerate, all'epoca, come pure astrazione matematiche prive di applicazioni, tale opinione muterà grazie all'operato di Riemann e alla applicazione che Einstein ne fece nella relatività generale.

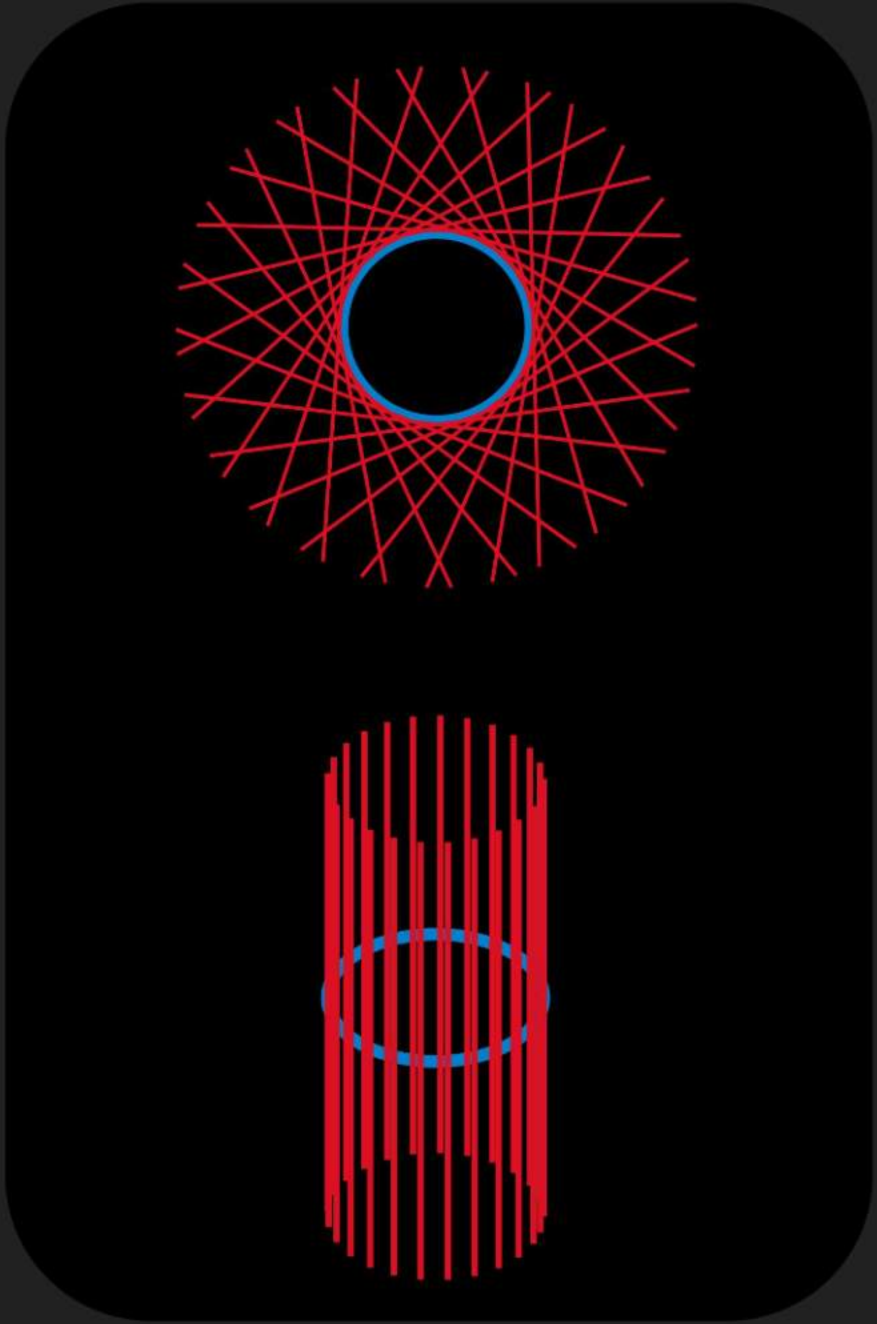


Riemann: varietà

Riemann non si limita a parlare, come fece Gauss, di superfici bidimensionali ma astrae a varietà, ovvero a spazi n-dimensionali.

Così come una curva differenziabile è un oggetto che localmente assomiglia ad una retta, o una superficie differenziabile che localmente assomiglia ad un piano, una varietà n-dimensionale somiglierà localmente allo spazio R .

L'aggettivo "differenziabile" indica il fatto che questa "somiglianza" locale consente di utilizzare localmente gli strumenti del calcolo differenziale definendo in ogni punto uno "spazio tangente" della stessa dimensione della varietà (analogamente a una retta tangente a una curva o un piano tangente a una superficie).



Riemann: metrica e invarianti

Per determinare le lunghezze è sempre necessario definire una metrica, ovvero una regola per calcolare la distanza tra punti.

All'interno di tale metrica è possibile ottenere curvatura ed equazioni delle geodetiche (ovvero le curve di minima lunghezza che collegano 2 punti).

Nella geometria di Riemann l'elemento infinitesimo di distanza è l'elemento lineare (immagine a fianco), cioè la sommatoria su due indici dei prodotti a 2 a 2 dei differenziali delle coordinate, con coefficienti g_{ij}, funzioni delle coordinate x_i. L'elemento lineare sarà poi chiamato tensore metrico.

Le proprietà (elemento lineare, curvatura, equazioni delle geodetiche) di una varietà riemanniana si mantengono invariate nel cambio del sistema di coordinate.

Si parla di invarianti differenziali.

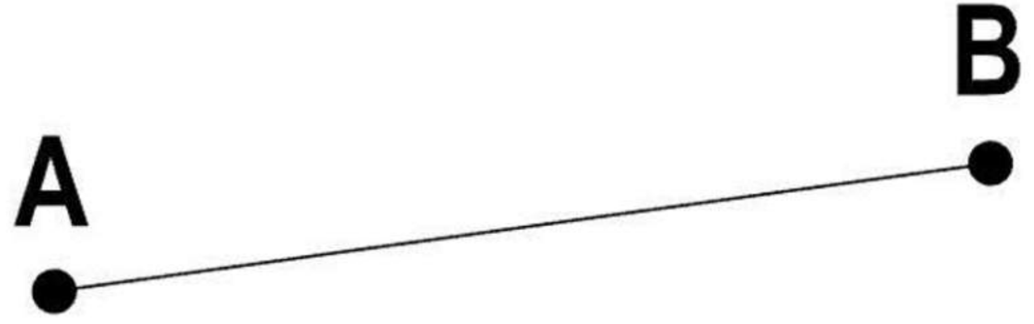
$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

Elemento lineare in spazio euclideo

Il caso più semplice risulta essere uno spazio euclideo in cui l'elemento lineare è dato dal teorema di Pitagora ($ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, nel caso di spazio tridimensionale). Effettuando un cambiamento di sistema di coordinate, mentre le coordinate cambiano, la distanza tra i due punti rimane costante. Si tratta quindi di un invariante.

In tale caso la geodetica è una retta.

Il tensore metrico g_{ij} per una varietà piatta (priva di curvatura) si riduce (a lato in forma matriciale) alla distanza euclidea cioè al teorema di Pitagora con i soli termini $(dx_i)^2$.



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

...nella relatività ristretta

Lo spazio-tempo di Minkowski, cioè la veste geometrica della relatività ristretta di Einstein, è una varietà piatta, più precisamente uno spazio pseudo-euclideo. Solo durante l'elaborazione della teoria generale della gravità Einstein fu obbligato a studiare la matematica che descrive le varietà curve (in quanto lo spazio-tempo della relatività generale non è piatto, ma viene curvato dalla presenza di ogni ente fisico dotato di energia)

Nella Relatività ristretta è definito l'invariante spazio-temporale: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ (quindi il tensore metrico è quello a fianco in forma matriciale) . Nonostante le distanze spaziali e temporali cambino da un sistema di riferimento all'altro, ds^2 rimane costante.

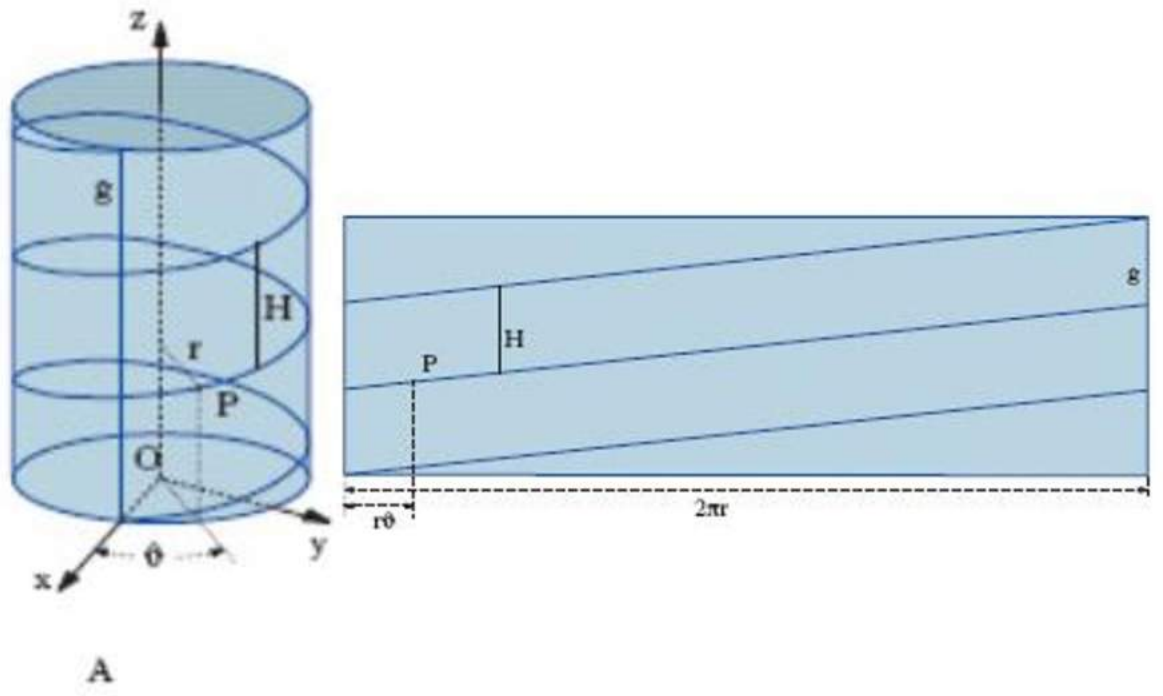
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Geodetiche ...su una superficie cilindrica

In una superficie cilindrica, vi sono tre tipi di geodetica:

- <u>le rette parallele all'asse del cilindro;</u>
- <u>le circonferenze perpendicolari all'asse del cilindro;</u>
- <u>le curve a spirale.</u>

Essendo il cilindro sviluppabile sul piano, tutte tre queste curve nello <u>sviluppo diventano rette</u>. Per questo motivo anche la superficie cilindrica è una varietà piatta, ovvero priva di curvatura (in quanto riconducibile a uno spazio euclideo)



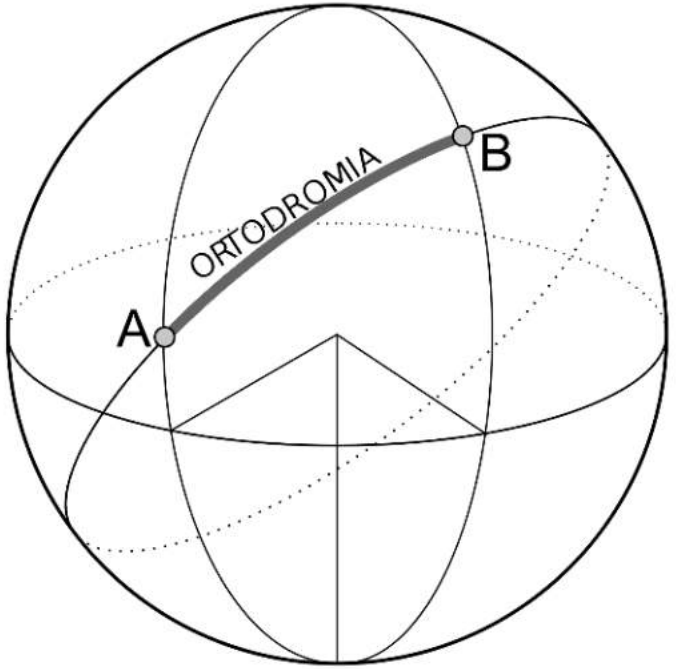
...su una superficie sferica

La superficie sferica non è più superficie piatta perciò la geodiche non sono più più le rette. In questo caso le geodetiche sono archi di cerchio massimo.

E' possibile definire delle coordinate intrinseche (longitudine e latitudine) che permettono di definire la posizione di un punto sulla superficie senza immergere tale superficie in uno spazio esterno. Le coordinate cartesiane x, y, z sono esprimibili in funzione delle coordinate intrinseche e viceversa.

E' possibile ottenere la lunghezza d'arco esprimendo l'elemento lineare (di Riemann) in funzione delle coordinate intrinseche.

$$x=\cos(La)\cdot\cos(l) \qquad y=\cos(La)\cdot\sin(L) \qquad z=\sin(La) \qquad [1]$$

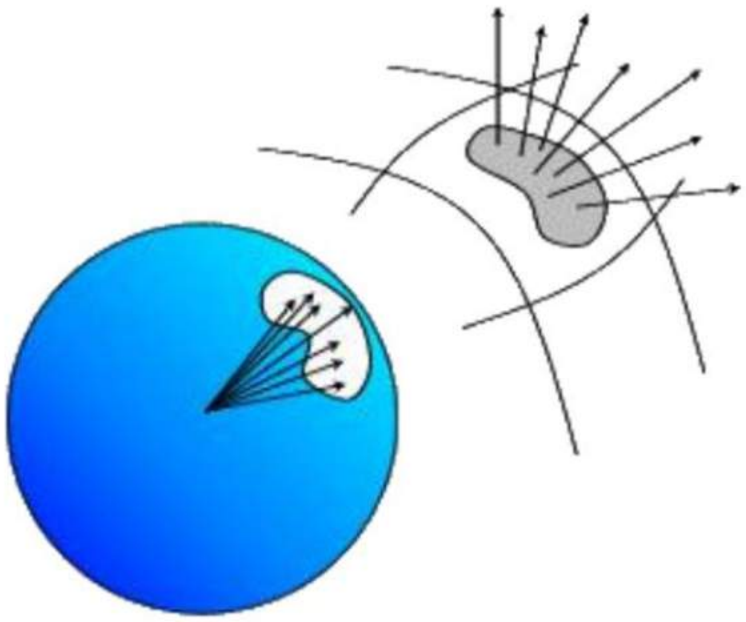


$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

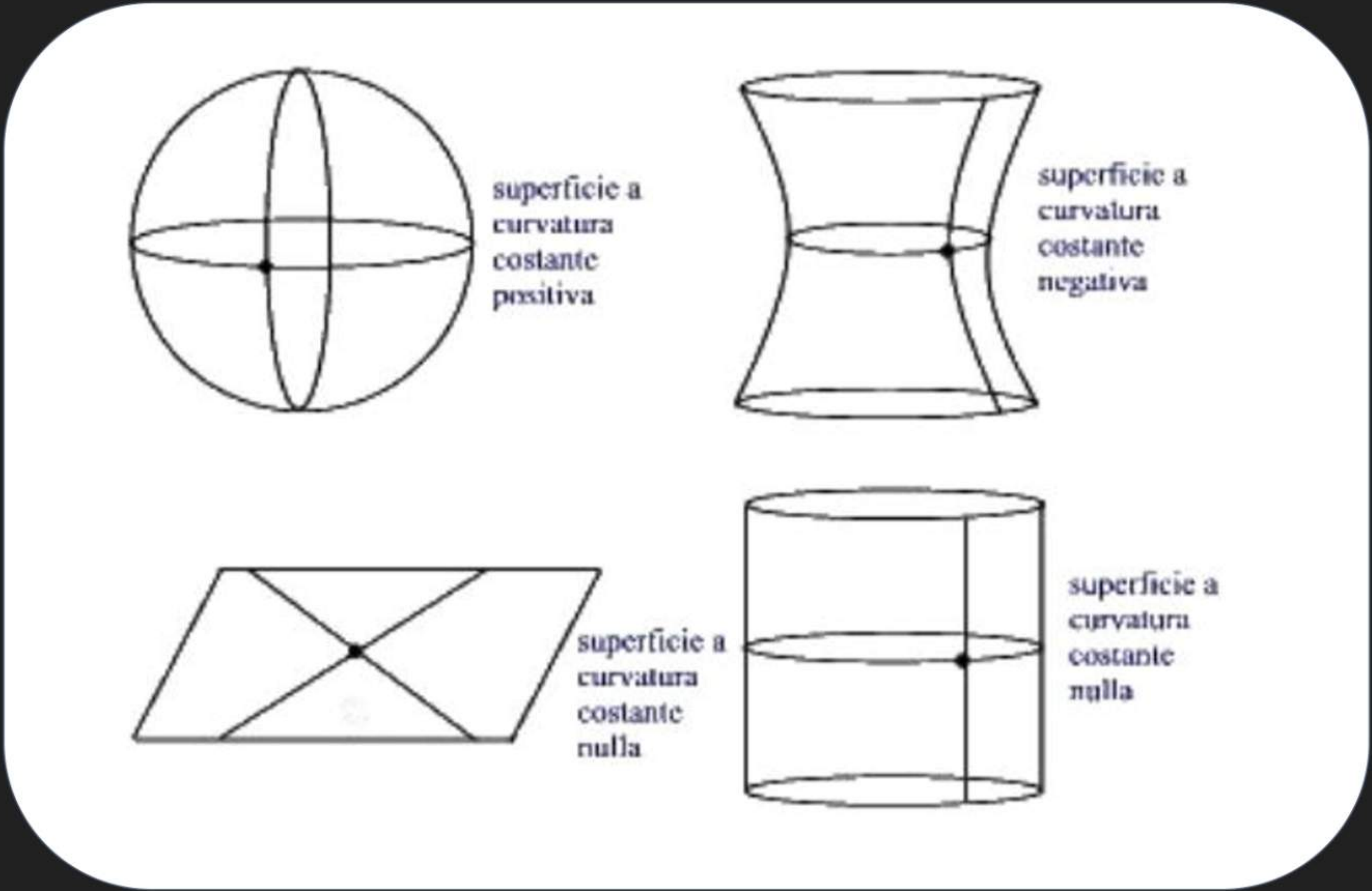
Curvatura secondo Gauss

Si consideri sulla superficie un intorno di un punto P, in cui si vuole determinare la curvatura, poi si disegni un vettore normale (di lunghezza unitaria) in ogni punto di tale intorno. Si trasportino poi tali vettori con origine nel centro di una sfera di raggio 1, creando una superficie composta dell'insieme delle estremità dei vettori. La curvatura totale della superficie in P è definita come il limite del rapporto tra l'area della regione sulla sfera e l'area della regione sulla superficie, quando queste due aree tendono a ridursi ai rispettivi punti P e P' (creato dalla normale di P trasportata). Essa è un numero positivo, negativo o nullo.

La nozione di curvatura può essere estesa a uno spazio n dimensionale riemanniano a curvatura costante. Anche in quel caso si potrà avere curvatura nulla o curvatura non nulla, positiva o negativa. Per definire la curvatura in uno spazio a curvatura non costante, come ad esempio lo spazio tempo pseudo-riemanniano della relatività generale, è necessario utilizzare i tensori.



Curvatura

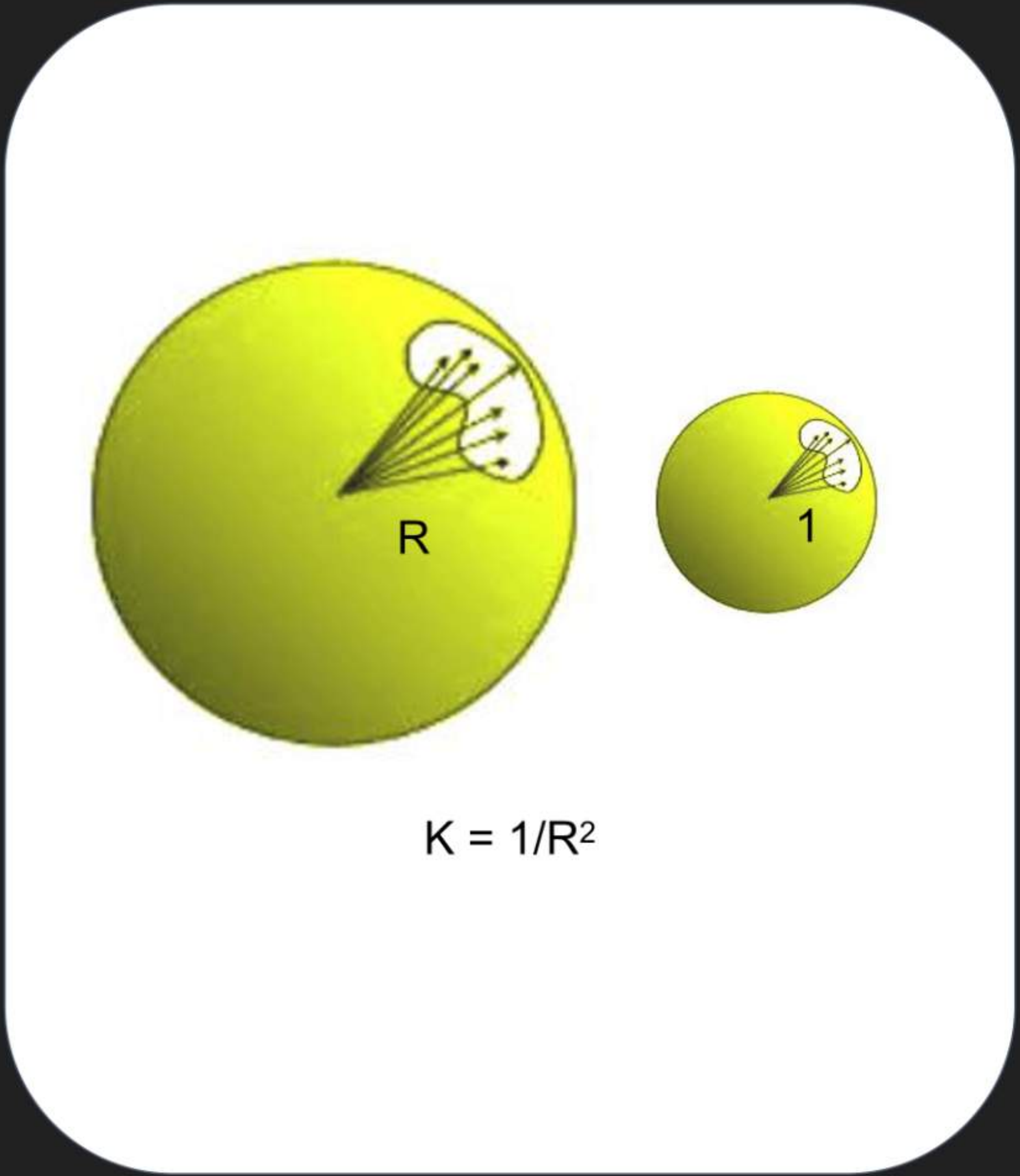

superficie a curvatura costante positiva
superficie a curvatura costante negativa
superficie a curvatura costante nulla
superficie a curvatura costante nulla

Curvatura di una sfera

Nel caso della sfera, riportando i vettori normali (i quali rappresentano i prolungamenti dei raggi) nel centro della sfera unitaria, si ottiene un'altra porzione di superficie sferica avente raggio 1, corrispondente allo stesso angolo solido. Da ciò si ricava che il rapporto tra le superfici è

$$K=1/R^2$$

Questo metodo di calcolo della curvatura non è intrinseco alla superficie.



Curvatura come grandezza intrinseca: Theorema Egregium

Fino a questo momento è stata definita la curvatura estrinsecamente in quanto tracciando i vettori normali alla superficie si esce dalla superficie poiché i vettori stanno nello spazio tridimensionale in cui è immersa la superficie.

Gauss dimostrò in seguito, con il Theorema egregium (risultato di importanza storica), che la curvatura di una superficie è una grandezza intrinseca alla superficie stessa, cioè non dipende da come la superficie è immersa nello spazio.

Da questo consegue che due superfici con diversa curvatura non possono essere isometriche, ad esempio, siccome sfera e piano non hanno la stessa curvatura, i planisferi presentano sempre distorsioni.

Curvatura determinata intrinsecamente: Theorema Egregium

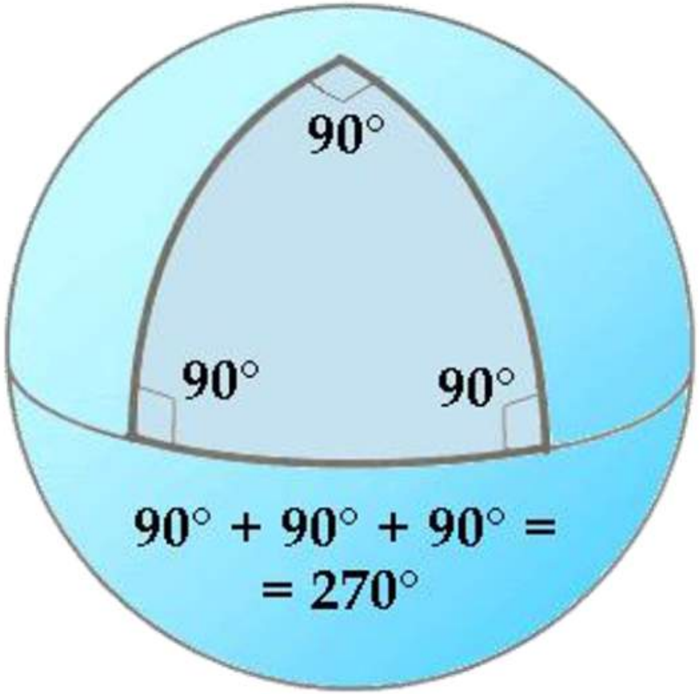
E' quindi possibile calcolare la curvatura anche in maniera intrinseca. Considerato ad esempio un triangolo curvilineo, il teorema di Gauss ha formulazione semplice: lo scarto della somma degli angoli rispetto a π è dato dall'integrale della curvatura esteso alla superficie del triangolo.

Se la curvatura della superficie è positiva la somma degli angoli interni supera π ; altrimenti se è negativa la curvatura, la somma è inferiore a π .

Se la superficie ha curvatura costante, la somma degli angoli interni del triangolo geodetico differisce da π della quantità KA, dove K è la curvatura, A è l'area del triangolo, quindi è uguale a π . K è ricavata a partire da grandezze intrinseche alla superficie: angoli e area.

Tutti gli elementi necessari a descrivere la geometria, (lunghezze, geodetiche e curvatura) sono quindi definibili in modo intrinseco necessario per descrivere la nostra realtà che possiamo osservare solo dall'interno.

$$\iint_A K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$



$$KA = 3\pi/2 - \pi = \pi/2 \longrightarrow K = \pi/2/(Atot/8) = 4\pi/(4\pi R^2) = 1/R^2$$

Ricci Curbastro

Gregorio Ricci Curbastro fu determinante per la formazione di Levi Civita che fece parte del suo gruppo di ricerca all'Università di Padova . Scriveranno insieme il fondamentale trattato sul calcolo tensoriale: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*.

La loro ricerca si concentrò soprattutto sullo studio delle forme differenziali quadratiche e delle loro proprietà, in particolare quella invariantiva. Ciò portò alla definizione di una nuova entità matematica, il tensore, ovvero "un insieme di funzioni matematiche (le componenti del tensore) che si trasformano al variare delle coordinate secondo leggi precise".

A seguito di una trasformazione, un tensore non rimane invariato, ma le equivalenze tra tensori si mantengono (T=S => T'=S'). Questa proprietà risulta essenziale nelle teorie relativistiche nelle quali le leggi fisiche devono essere equivalenti in ogni sistema di riferimento. Tale caratteristica dei tensori li rese lo strumento ideale per la formulazione della Relatività generale einsteiniana.

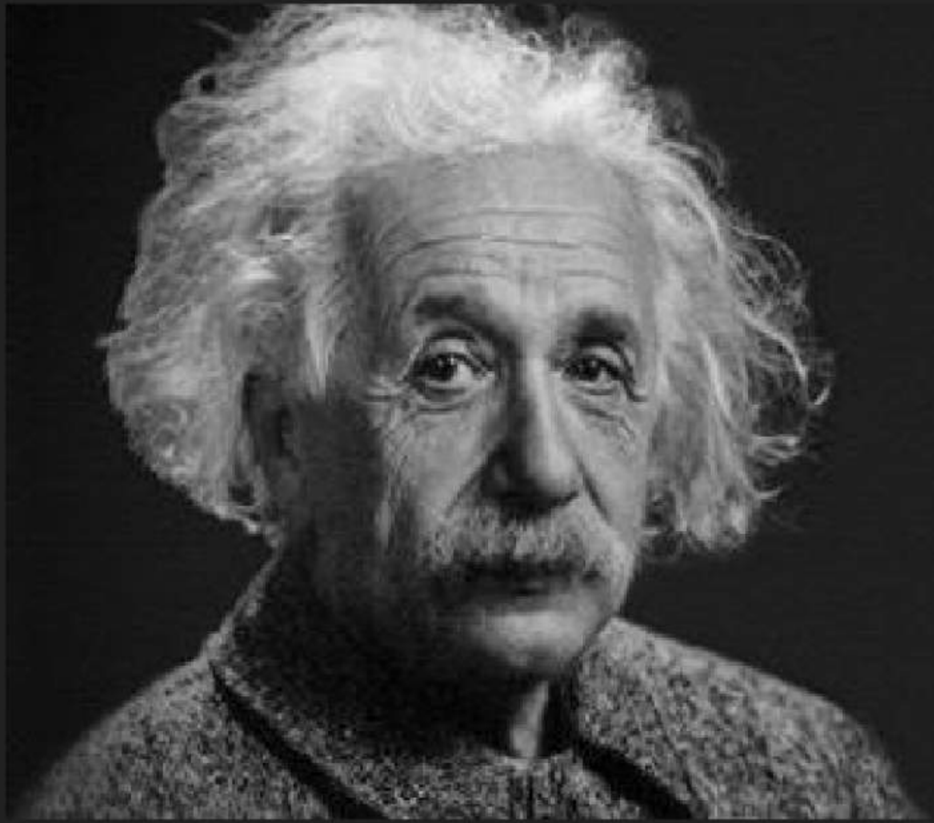
Ricci definì un nuovo tipo di derivata, ovvero la derivata covariante; questo tipo di operazione fa sì che la derivata di un tensore sia ancora un tensore.

Tensori e Relatività generale

Albert Einstein aveva studiato, non senza difficoltà e con l'aiuto del matematico Grossman, la geometria differenziale di Gauss e Riemann e il calcolo tensoriale di Ricci Curbastro e Levi Civita.

Grazie al calcolo tensoriale Einstein poté formulare le equazioni della relatività generale, estendendo l'invarianza delle leggi fisiche a tutti i sistemi di riferimento e non solo a quelli inerziali della relatività ristretta.

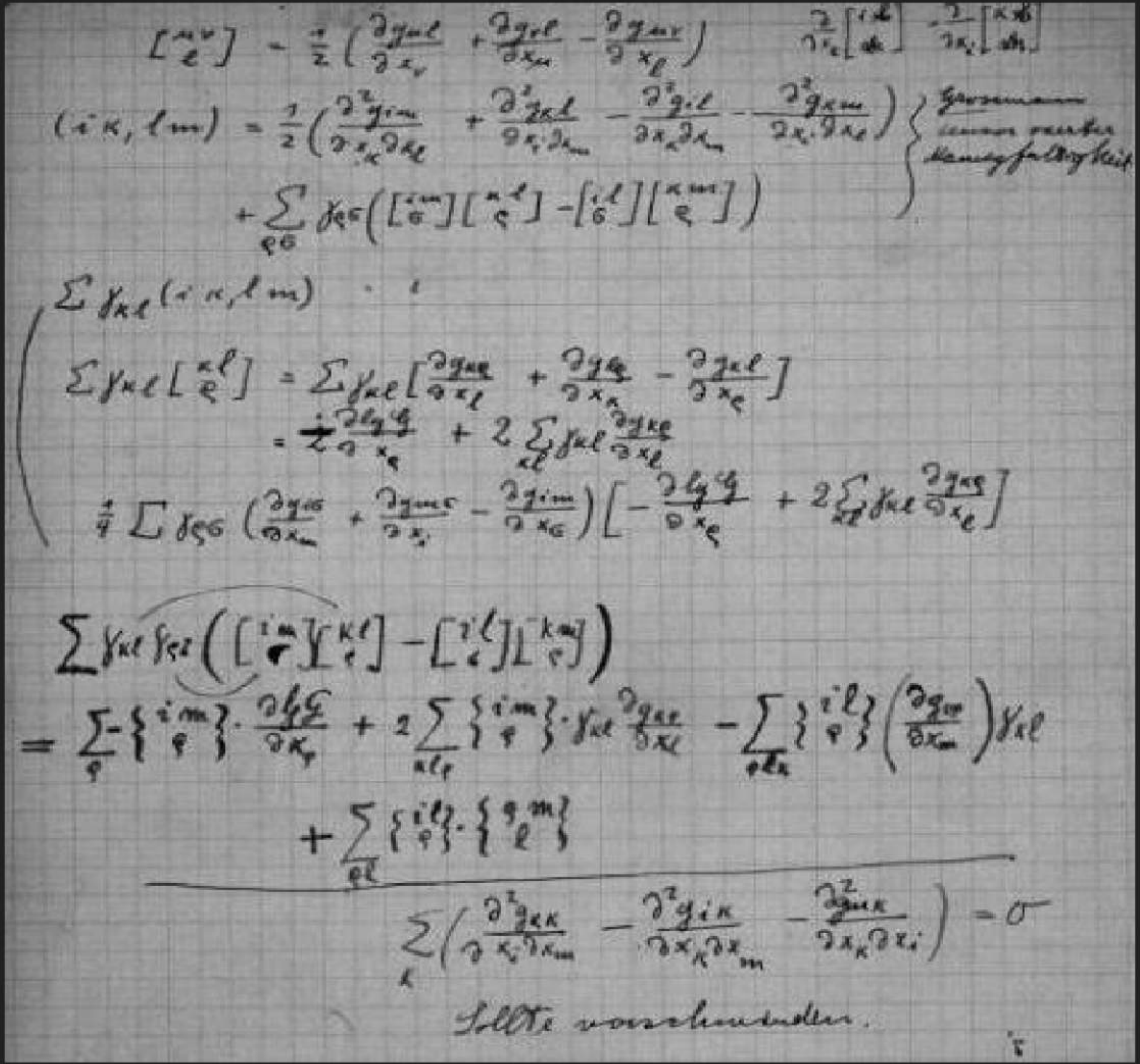
Il calcolo tensoriale si rivelò indispensabile poiché lo spazio-tempo della relatività generale è uno spazio curvo e servivano strumenti matematici che esprimessero tale curvatura in relazione agli enti fisici che la generano.



Non preoccuparti delle difficoltà che incontri in matematica, ti posso assicurare che le mie sono ancora più grosse.

(lettera alla liceale Barbara Wilson, 07/01/1943)

Pagina autografa di Einstein



$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ l\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu l}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu l}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_l}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{bmatrix}il\\ m\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix}kl\\ m\end{bmatrix}$$

$$(ik, lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x_i \partial x_l}\right) + \sum_{\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}\left(\begin{bmatrix}im\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}kl\\ \rho\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}il\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}km\\ \rho\end{bmatrix}\right)$$

Grossmann Tensor vierter Mannigfaltigkeit

$$\sum \gamma_{kl}(ik, lm)$$

$$\sum \gamma_{kl}\begin{bmatrix}kl\\ \rho\end{bmatrix} = \sum \gamma_{kl}\left[\frac{\partial g_{k\rho}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{l\rho}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_\rho}\right]$$

$$= -\frac{\partial \lg G}{\partial x_\rho} + 2\sum_{kl}\gamma_{kl}\frac{\partial g_{k\rho}}{\partial x_l}$$

$$\frac{1}{4}\sum \gamma_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{i\sigma}}{\partial x_m} + \frac{\partial g_{m\sigma}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x_\sigma}\right)\left[-\frac{\partial \lg G}{\partial x_\rho} + 2\sum_{kl}\gamma_{kl}\frac{\partial g_{k\rho}}{\partial x_l}\right]$$

$$\sum \gamma_{kl}\gamma_{\rho\sigma}\left(\begin{bmatrix}im\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}kl\\ \rho\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}il\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}km\\ \rho\end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_\rho -\left\{\begin{matrix}im\\ \rho\end{matrix}\right\}\cdot\frac{\partial \lg G}{\partial x_\rho} + 2\sum_{kl\rho}\left\{\begin{matrix}im\\ \rho\end{matrix}\right\}\cdot\gamma_{kl}\frac{\partial g_{k\rho}}{\partial x_l} - \sum_{\rho kl}\left\{\begin{matrix}il\\ \rho\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial g_{k\rho}}{\partial x_m}\right)\gamma_{kl}$$

$$+ \sum_{\rho l}\left\{\begin{matrix}il\\ \rho\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\rho m\\ l\end{matrix}\right\}$$

$$\sum_k\left(\frac{\partial^2 g_{kk}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_k \partial x_i}\right) = 0$$

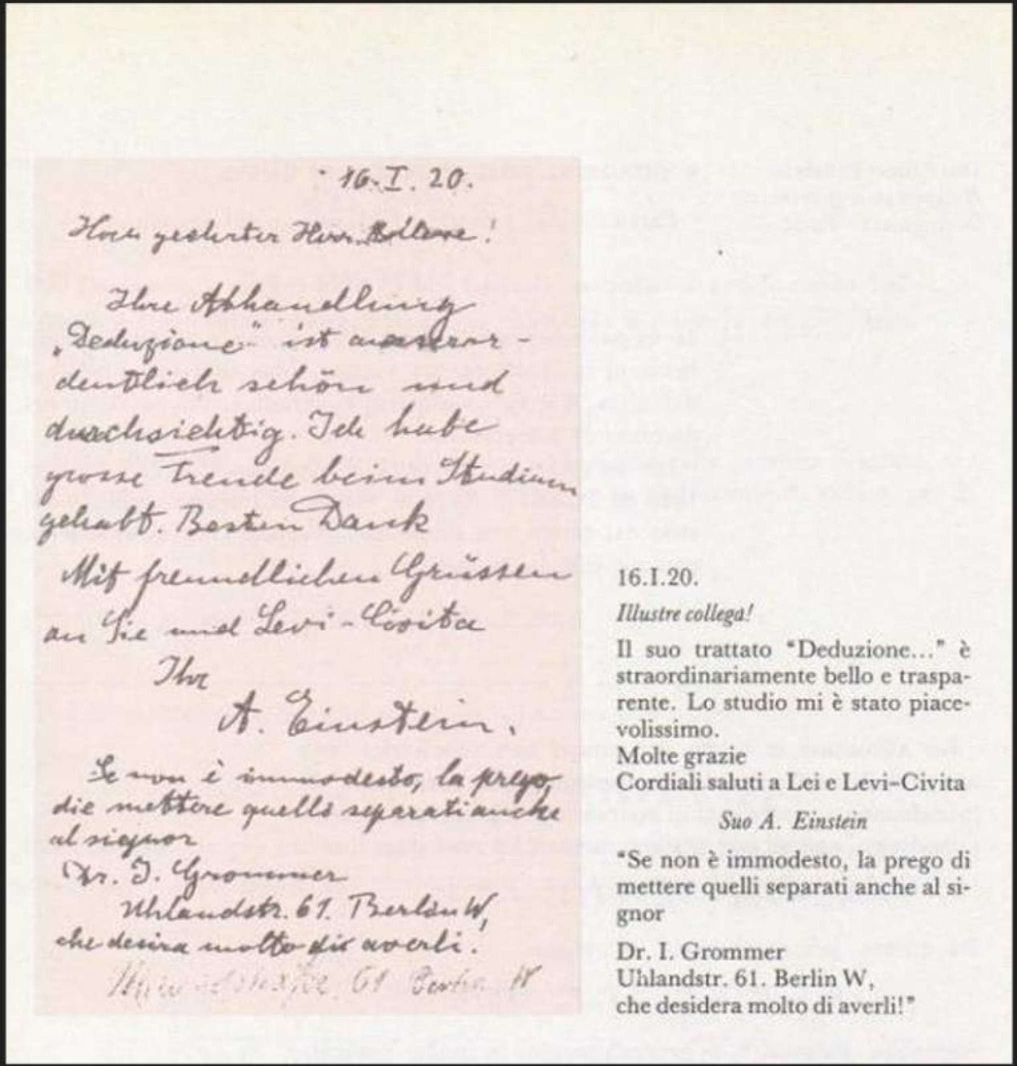
sollte verschwinden.

Carteggio tra Einstein e Levi Civita

In una lettera del 1915, però, Levi Civita evidenzia un errore nella dimostrazione di un elemento cardine. Einstein è inizialmente convinto che tale dimostrazione possa reggere, ma in seguito comprenderà di essere nel torto e la riscriverà in altra forma.

Da tale errore, che Levi Civita corresse, nacque una fitta corrispondenza tra i due (una lettera nella figura a destra). Questa si sarebbe protratta fino alla fine della primavera di quell'anno dopodiché, a causa dell'entrata in guerra dell'Italia, risultò impossibile ai due continuare a scambiarsi lettere per tutto il periodo della prima guerra mondiale.

Einstein ebbe sempre grande ammirazione per Levi Civita.


16.I.20.

Hoch geehrter Herr Kollege!

Ihre Abhandlung „Deduzione" ist ausserordentlich schön und durchsichtig. Ich habe grosse Freude beim Studium gehabt. Besten Dank

Mit freundlichen Grüssen an Sie und Levi-Civita

Ihr
A. Einstein.

Se non è immodesto, la prego di mettere quelli separati anche al signor
Dr. J. Grommer
Uhlandstr. 61. Berlin W,
che desira molto di averli.

16.I.20.

Illustre collega!

Il suo trattato "Deduzione..." è straordinariamente bello e trasparente. Lo studio mi è stato piacevolissimo.
Molte grazie
Cordiali saluti a Lei e Levi-Civita

Suo A. Einstein

"Se non è immodesto, la prego di mettere quelli separati anche al signor

Dr. I. Grommer
Uhlandstr. 61. Berlin W,
che desidera molto di averli!"

Einstein e Levi Civita, oltre ad essere accomunati dalla genialità e dagli interessi di ricerca, condividevano anche le origini ebraiche e negli anni dei totalitarismi subirono le conseguenze della persecuzione razziale.

Per quanto riguarda Levi Civita, egli, nonostante avesse prestato giuramento di fedeltà al fascismo contro la sua volontà, per poter proseguire il suo lavoro di matematico, nel 1938 venne rimosso dall'insegnamento. Grazie all'appoggio di Pio XI, potè continuare i suoi studi nella prestigiosa Pontificia accademia delle scienze. *"A causa della campagna antisemita che infuria qui, io non ho più contatti con il mondo accademico italiano".* Morì di crepacuore nel 1941, indebolito dai tre anni di morte civile e di isolamento a cui lo condannarono le leggi razziali.

Le posizioni antimilitariste, insieme alle sue origini, posero anche Einstein in una scomoda posizione. Presto cominciò a ricevere lettere minatorie e ingiurie. L'antisemitismo divenne, anche, strumento per attacchi sul campo scientifico. Nel 1933, anno della salita al potere di Adolf Hitler, venne promulgata la "Legge della Restaurazione del Servizio Civile", a causa della quale tutti i professori universitari di origine ebraica furono licenziati. Con i nazisti al potere, venne condotta una strenua campagna atta a screditare i suoi lavori, etichettandoli come "fisica ebraica". Decise, dunque, di trasferirsi negli Stati Uniti. Nel 1944, a Rignano sull'Arno, un reparto SS venne mandato ad uccidere la moglie e le figlie di suo cugino Robert, verosimilmente come rappresaglia nei suoi confronti.

Equazioni della Relatività Generale

Le equazioni di campo di Einstein pubblicate nel 1915 sono scritte in forma tensoriale come nell'immagine a destra.

$G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein o tensore gravitazionale: esprime la curvatura dello spazio-tempo. Esso è definito in relazione al tensore $R_{\mu\nu}$, ovvero tensore di curvatura o di Ricci (in onore, appunto di Ricci Curbastro), $g_{\mu\nu} = g_{ij}\, dx_i\, dx_j$, il tensore metrico definito da Riemann ed R, scalare di curvatura.

Nelle equazioni il tensore di Einstein è uguagliato, a meno di una costante, al tensore materia-energia $T_{\mu\nu}$ che rappresenta qualsiasi ente dotato di energia che possa deformare lo spazio-tempo.

Quindi la geometria dello spazio-tempo e la forma delle geodetiche (traiettorie della luce) sono completamente determinati da masse, campi elettromagnetici o altri enti fisici dotati di energia.

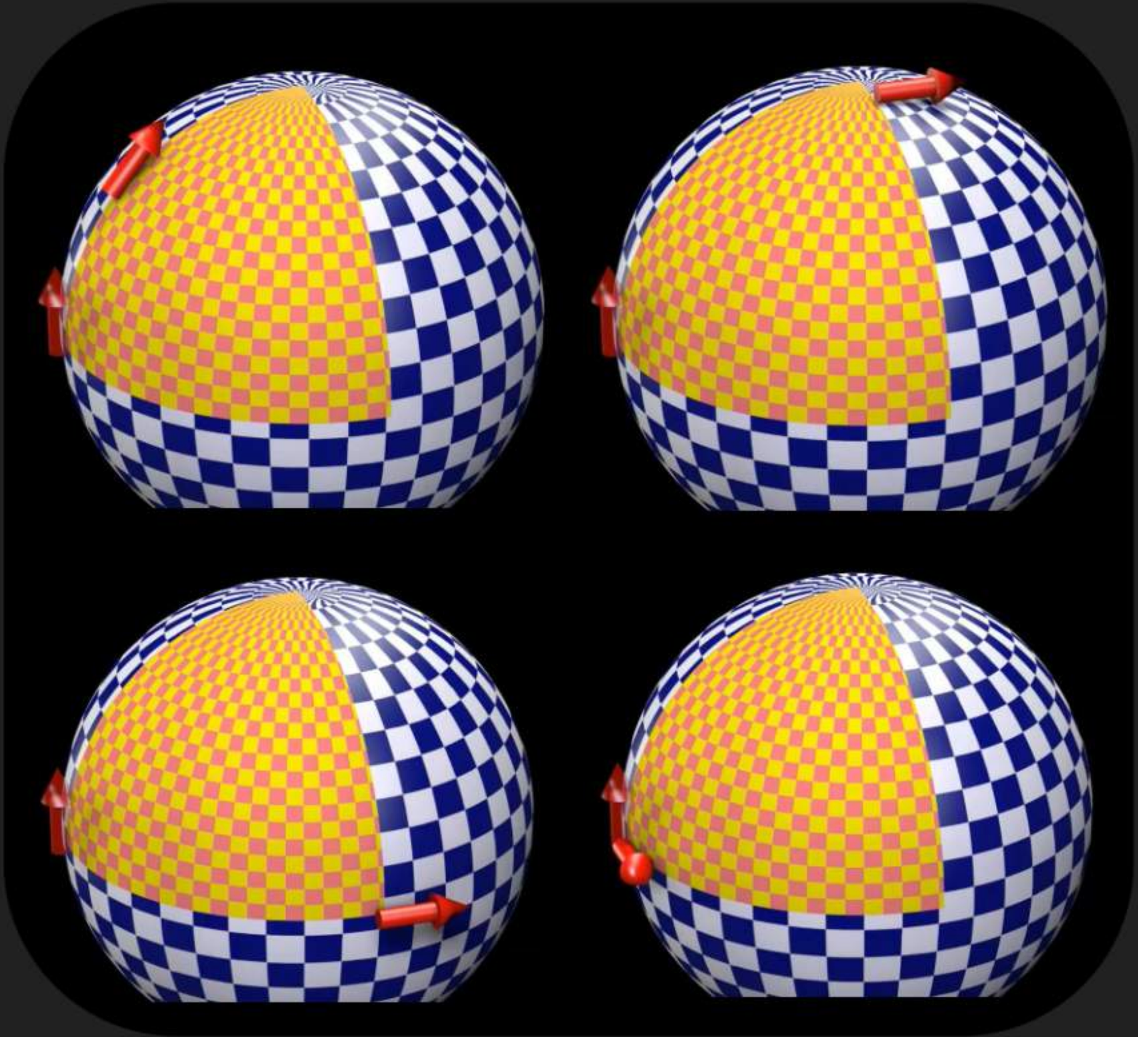
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

La connessione di Levi Civita

Si è visto che nelle equazioni della Relatività Generale due tensori portano il nome di Ricci Curbastro e di Einstein. Levi Civita, invece, è ricordato nel nome di un altro oggetto matematico: la connessione di Levi Civita.

Nella geometria euclidea un modo di definire due rette (geodetiche) parallele è la condizione che formino stessi angoli con una terza retta (geodetica). Estendendo la definizione alla superficie curva, due geodetiche r ed s, passanti rispettivamente per A e per B, sono parallele rispetto a una terza geodetica t se formano angoli uguali con questa geodetica t passante per A e B. Tale proprietà di parallelismo non è assoluta come nella geometria euclidea, infatti può essere che r ed s non siano più parallele rispetto ad un'altra geodetica t'.



Un esempio semplice è quello dei due meridiani che sono paralleli rispetto all'equatore formando con esso entrambi angoli di 90°, ma, se si considera come terza geodetica un altro meridiano, gli angoli formati al polo da r e da s con questo meridiano sono diversi. Quindi la geometria della sfera non è caratterizzata da parallelismo assoluto.

La connessione di Levi Civita - il trasporto parallelo

Il fatto che la geometria della sfera non sia caratterizzata da parallelismo assoluto può essere verificato anche utilizzando il ‘trasporto parallelo’. Trasportare parallelamente significa far muovere un vettore lungo una geodetica in modo che l’angolo tra vettore e geodetica resti costante. Trasportando parallelamente un vettore su una superficie sferica, ad esempio lungo un triangolo geodetico, fino a tornare al punto di partenza, si verifica che il vettore risulta ruotato di 90° rispetto alla direzione iniziale.

Tramite la nozione di trasporto parallelo, si può definire la curvatura dello spazio tramite la variazione di direzione di un vettore infinitesimo trasportato parallelamente con passi infinitesimi.

La nozione di trasporto parallelo fu generalizzata da Levi Civita per adattarla a spazi riemanniani n-dimensionali, come quello della relatività generale. La connessione di Levi-Civita ∇, se esiste, è quella derivata covariante che ha la proprietà di conservare il prodotto scalare tra due vettori v e w trasportati parallelamente tramite ∇ lungo una curva C.

La derivazione covariante è una derivata in cui gli incrementi dei tensori sono calcolati utilizzando il trasporto parallelo.

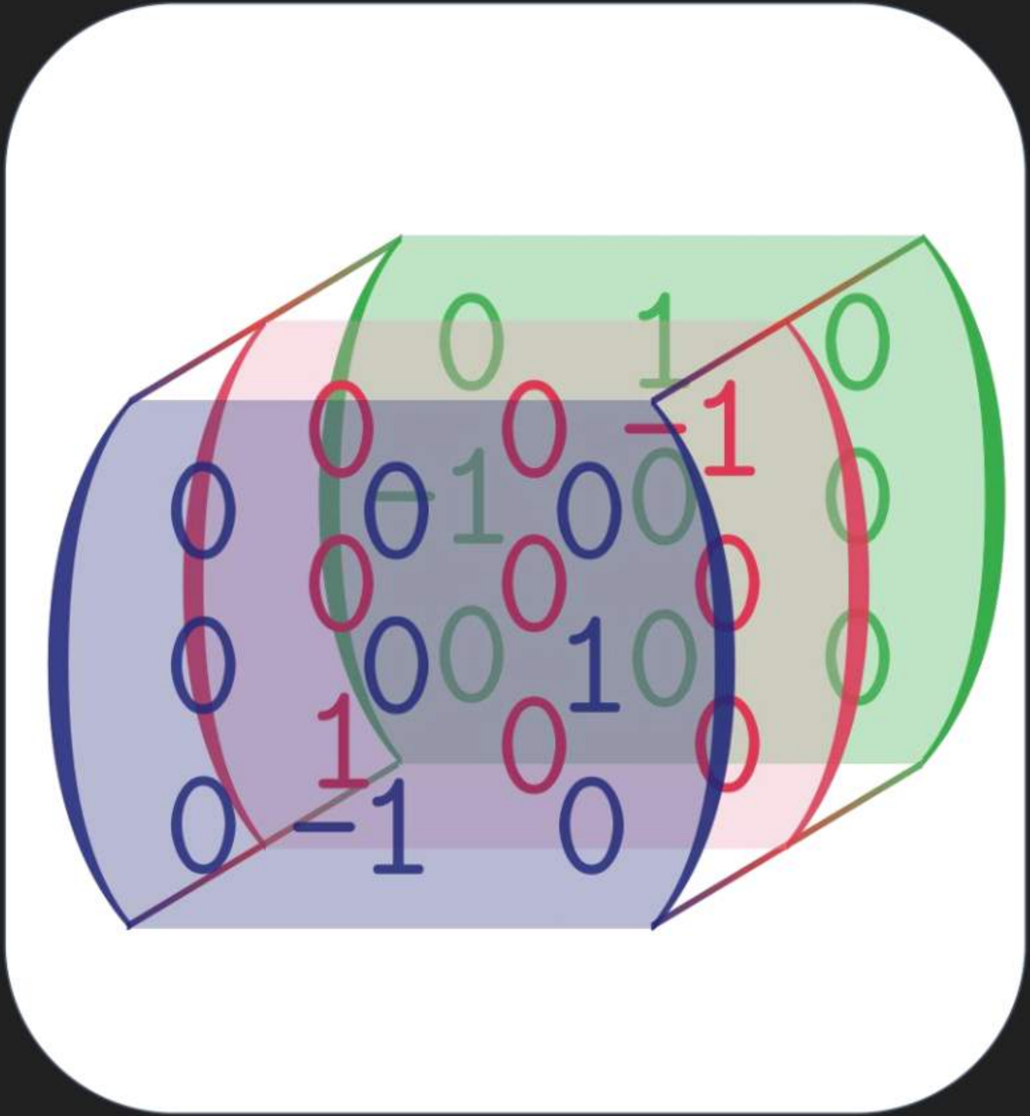
APPROFONDIMENTO SUL CONCETTO DI TENSORE E SUL CALCOLO TENSORIALE

Introduzione sui tensori

Un tensore è un insieme di funzioni (che rappresentano le componenti del tensore), esso si trasforma a seguito di un cambiamento di coordinate secondo particolari leggi. Ogni componente in un sistema di coordinate è una funzione lineare omogenea delle componenti in un altro sistema di coordinate.

In caso di uguaglianza tra tensori in un sistema di coordinate, tale uguaglianza è valida in ogni sistema di coordinate. Ciò significa che l'uguaglianza è, quindi, invariante al cambiamento di sistema di riferimento

Ciò vuol dire che il significato di un tensore viene mantenuto, indifferentemente dalla variazione da un sistema all'altro. Tale proprietà assume particolare rilievo nella teoria della generale o in qualsiasi ambito fisico, in quanto si vogliono formulare leggi la cui validità sia indipendente dal sistema di riferimento.



TENSORI. (G. Ricci Curbastro, T. Levi Civita, 1901)

Tensore di ordine n nello spazio euclideo reale a 3 dimensioni è un ente reale dipendente da n indici variabili da 1 a 3, composto quindi da 3^n componenti reali, **invariante rispetto ad un cambiamento di base** (o di riferimento). Assegnare un tensore equivale quindi a fornire le sue componenti

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

in un dato sistema di riferimento, e la legge di trasformazione nel passare dal riferimento delle u_i a quello delle $u_j(u_i)$

$$\overline{A_{j_1 j_2 \cdots j_n}} = A_{i_1 i_2 \cdots i_n} \frac{\partial u_{i_1}}{\partial \overline{u_{j_1}}} \frac{\partial u_{i_2}}{\partial \overline{u_{j_2}}} \cdots \frac{\partial u_{i_n}}{\partial \overline{u_{j_n}}}$$

Per l' esattezza la definizione data riguarda i **tensori cartesiani** invarianti per trasformazioni di base ortogonale, più in generale occorrerebbe distinguere tra le componenti coovarianti del tensore, che si trasformano come le coordinate, e le componenti controvarianti, che si trasformano in maniera opposta (occorre moltiplicare per le derivate delle nuove coordinate rispetto alle vecchie).

Gli **scalari** sono **tensori di ordine zero**, i **vettori** sono **tensori di ordine uno**.

Esempio: trasformazione tensore metrico

Si è detto che un tensore è caratterizzato da particolari leggi di trasformazione per passare da un sistema di coordinate ad un altro.

Prendiamo come esempio il tensore metrico g_{ij} [1]. Esso deve variare da un sistema di riferimento ad un altro in quanto la distanza deve rimanere uguale nonostante dx^i siano sottoposti a un cambiamento di coordinate

Il tensore metrico ottenuto che indichiamo con G_{ij} [in 2] è in relazione con il tensore di partenza tramite una legge di trasformazione [3].

[1] $$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij} dx^i dx^j$$

[2] $$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{N} G_{ij} dx^i dx^j$$

[3] $$G_{kl} = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}$$

Convenzione di Einstein

Convenzione di Einstein: tale convenzione stabilisce che, se compaiono indici latini, essi sono sempre tra 1 e N (non è necessario specificare quindi) [1] e che se tali indici si ripetono più volte in un termine indichino una sommatoria [2].

Einstein scrive infatti: "*Un'occhiata alle equazioni del presente paragrafo mostra che le sommatorie si effettuano sempre rispetto agli indici che si presentano due volte sotto il segno di somma e unicamente rispetto a indici siffatti. Perciò, è possibile, senza ledere la chiarezza, sopprimere il segno ∑. A tale scopo diamo la seguente regola: "quando un indice si presenta due volte in un termine di un'espressione, occorre sommare rispetto ad esso, salvo il caso che sia esplicitamente indicato il contrario*".

[1]

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \ldots x^N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$x^i = \psi^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots \bar{x}^N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \ldots x^N)$$

$$x^i = \psi^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots \bar{x}^N)$$

[2]

$$\sum_{i=1}^{N} a^i b_i = a^i b_i$$

Esempio: calcolo del prodotto scalare

Ogni vettore può essere scritto come una sommatoria di vettori e_i che definiscono una base dello spazio e delle componenti u^i e v^i dei vettori (si può abbreviare la scrittura usando la convenzione di Einstein).

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u^i \boldsymbol{e}_i \cdot v^j \boldsymbol{e}_j$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} u^i v_i$$

Si applica la saturazione degli indici. Si definisce operazione di saturazione o contrazione di due indici, quella in cui si equagliano due indici e si somma rispetto a tale indice, ora in comune, detto saturo.

$$= u^i v_i$$

Esempio: equazioni di Maxwell

Il calcolo tensoriale risulta essere molto sintetico nelle sue formulazioni, anche grazie a convenzioni come quella di Einstein. Ciò fa si che esso sia diventato uno strumento molto utile e apprezzato nell'ambito della fisica teorica.

Un esempio: le ultime due equazioni di Maxwell, se vengono scritte in forma tensoriale, sono espresse dalla semplice formula a fianco.

F è il tensore campo elettromagnetico e J è detta quadricorrente.

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu$$

Bibliografia - sitografia

Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Vol II, Einaudi, 1991

B.Spain, *Calcolo tensoriale*, Cremonese, 1971

G.Longhi, Appunti di Relatività, Liceo scientifico G. Peano

https://liceocuneo.it/de-bernardi/wp-content/uploads/sites/13/Da-Gauss-ai-tensori.pdf

https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/258938

https://www.universome.eu/wp-content/uploads/2019/05/End_of_universe-400x360.jpg

http://www.agopax.it/Rotta%20Ortodromica/Immagini/375px-Ortodroma_ITA.svg.png

https://www.ilmare.com/data/foto/huge/p/planisfero-fisico-politico-plastificato-con-aste_49442.jpg

Bibliografia - sitografia

https://www.matmedia.it/wp-content/uploads/2020/06/mondrian4-2.png

https://web.math.unifi.it/~archimede/matematicaitaliana/immagini/ritratti/riccicur.jpg

https://www.scienzaeconoscenza.it/data/blog/big/a/albert-einstein-scienzaconoscenza.jpg

https://eterodossia.com/wp-content/uploads/2017/10/img157-669x1024.jpg

http://vetopsy.fr/mathematiques/images/symbole-levi-civita.jpg

https://www.youtube.com/watch?v=UfThVvBWZxM&t=525s

https://www.latigredicarta.it/wp-content/uploads/2017/05/Tullio-Levi-Civita_Albert-Einstein_Gregorio-Ricci-Curbastro-1024x683.jpg

https://lh3.googleusercontent.com/proxy/KzOxCeVFBfduO2eYA58WkjxxdzN6EqkitnaWXunr-43RBbRsLosN632pAWlZqONUQh0RaUVvwEKu0e_k

Matteo Di Noia
Classe 5G - Liceo Peano Pellico Cuneo