Giochi di Archimede 2017

Soluzioni gara biennio (versione T1)

(1) La risposta corretta è (C).
Si vede facilmente che $5 \cdot (1000k + 125) = 5000k + 625$ e che $5 \cdot (1000k + 625) = 5000k + 3125 = 1000(5k + 3) + 125$. Poiché $5^3 = 125$, le potenze con esponente dispari di 5, dalla terza in poi, termineranno con le cifre 125, mentre quelle con esponente pari termineranno con 625. Possiamo concludere che la cifra delle centinaia di 5^{2017} è 1.
Problema proposto da Antonio Fanelli.

(2) La risposta corretta è (E).
Se al tavolo sono seduti due furfanti e due cavalieri, ogni cavaliere dice effettivamente il vero, perché vede due furfanti, e ogni furfante dice effettivamente il falso, perché vede solo un furfante. Allo stesso modo, se al tavolo sono seduti solo furfanti, ognuno vede tre furfanti, e quindi dice effettivamente il falso. Gli elementi forniti non permettono quindi di concludere se al tavolo siano presenti due o quattro furfanti.
Problema proposto da Matteo Protopapa.

(3) La risposta corretta è (D).
Poiché l'unico divisore primo di 2^{12} è 2, il numero m deve essere una potenza di 2. Se $m = 2^k$, allora $m^n = (2^k)^n = 2^{kn}$ e $kn = 12$. Le uniche scelte per n sono i sei divisori di 12: $n = 1, 2, 3, 4, 6, 12$, che corrispondono ai valori $m = 2^{12}, 2^6, 2^4, 2^3, 2^2, 2$, rispettivamente.
Problema proposto da Alberto Bucci.

(4) La risposta corretta è (B).
Come si vede agevolmente, dopo un numero $k \leq 2017$ di minuti la prima stanza contiene $2017 - k$ persone, mentre le k persone che ne sono uscite sono disposte a due a due in ciascuna delle $\lfloor k/2 \rfloor$ stanze successive, più eventualmente una in quella immediatamente successiva se k è dispari. Dopo 1001 minuti, la prima stanza conterrà 1016 persone, le successive 500 conterranno due persone e la stanza numero 502 conterrà una sola persona. Le rimanenti $2017 - 502 = 1515$ stanze saranno allora vuote.
Problema proposto da Matteo Rossi.

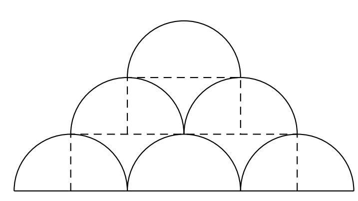
(5) La risposta corretta è (E).
Per escludere le altre, basta osservare che $3000/3 = 1000$ non termina con le cifre 333 o 666; $8000/8 = 1000$ non termina con le cifre 25 o 75; $3000/125 = 24$ non termina con la cifra 8 o 6; 1000 non è multiplo di 16.
Problema proposto da Giovanni Barbarino.

(6) La risposta corretta è (A).
Indichiamo con x_k l'ultimo numero rimasto dopo aver proceduto come descritto con i numeri tra 1 e 2^k. Se si procede con i numeri tra 1 e 2^{k+1}, al primo passaggio rimangono solo i 2^k numeri pari, e i successivi k passaggi selezionano il numero pari di posizione x_k, contando però dal fondo. Pertanto, $x_{k+1} = 2(2^k - x_k + 1) = 2^{k+1} - 2x_k + 2$.
Sapendo che $x_0 = 1$, si ottiene rapidamente

$$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = 6, x_5 = 22, x_6 = 22.$$

Problema proposto da Antonio Fanelli.

(7) La risposta corretta è (D).
Possiamo ripartire la regione nel modo indicato in figura dalle linee tratteggiate. L'area complessiva dei due rettangoli è allora $6\,cm^2$, mentre quella dei settori circolari è $\frac{3}{2}\pi\ cm^2$.
Problema proposto da Carmelo Di Stefano.



(8) La risposta corretta è (B).
Il prodotto di a e b è $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Poiché $MCD(a,b) = 2$, uno dei due numeri avrà nella sua fattorizzazione un solo fattore 2, mentre l'altro ne avrà 2; gli altri fattori primi 3 e 5 sono presenti nel prodotto ab una sola volta, e non contribuiranno quindi al MCD. Le coppie di interi che si ottengono sono allora:

$$(2,60), \qquad (6,20), \qquad (10,12), \qquad (4,30).$$

Problema proposto da Antonio Fanelli e da Riccardo Zanotto.

(9) La risposta corretta è (E).
Poiché l'angolo $\widehat{BAC}$ è uguale alla somma degli altri due angoli di ABC, segue che $\widehat{BAC}$ è un angolo retto. Si vede inoltre facilmente che nessuna delle possibilità indicate nelle altre risposte è necessariamente vera.
Problema proposto da Lorenzo Furio.

(10) La risposta corretta è (D).
I numeri primi di una cifra sono $2, 3, 5, 7$. Ogni numero primo con la proprietà indicata dovrà quindi avere queste come sole cifre, perché cancellandole tutte tranne una si dovrà ottenere un numero primo.
Inoltre, 2 e 5, se presenti, potranno apparire solamente nella prima posizione; se così non fosse, cancellando tutte le cifre successive al 2 o al 5 si otterrebbe un numero pari o multiplo di 5 con almeno due cifre, che non può essere primo. In particolare, solo una cifra tra 2 e 5 può essere presente nel numero, ed esclusivamente nella prima posizione. Una cifra non può nemmeno essere presente più di una volta, altrimenti cancellando tutte le cifre tranne due uguali si otterrebbe un multiplo di 11, che non può essere primo.
Gli unici numeri di due cifre che soddisfano le condizioni appena descritte sono $23, 27, 37, 53, 57, 73$.
Di questi, solamente $23, 37, 53, 73$ sono primi.
Per quanto riguarda i numeri con almeno tre cifre:

- Se non contengono né la cifra 2, né la cifra 5, sono composti solamente da cifre 3 e 7 e devono necessariamente avere cifre ripetute. Non possono quindi soddisfare le proprietà indicate.
- Se hanno 2 come prima cifra, non possono avere né 5 (che dovrebbe essere in prima posizione) né 7 (poiché 27 non è primo) come altre cifre. Ogni cifra successiva al 2 è quindi un 3, ma allora hanno necessariamente cifre ripetute e non possono quindi soddisfare le proprietà indicate.
- Allo stesso modo, se hanno 5 come prima cifra, ogni cifra successiva deve essere un 3, e sono necessariamente presenti cifre ripetute.

In conclusione, gli unici numeri che soddisfano la proprietàà descritta sono $2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73$.
Problema proposto da Emanuele Tron.

(11) La risposta corretta è (C).
Dato che AE è pari ai $2/3$ di AB, l'area del triangolo AEC è $2/3$ di quella di ABC (infatti l'altezza condotta da C è la stessa per i due triangoli). Allo stesso modo, l'area di AEH è pari ai $3/4$ dell'area di AEC. Pertanto l'area di AEH è pari a $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ dell'area del triangolo ABC.
Problema proposto da Matteo Protopapa.

(12) La risposta corretta è (A).
Chiara vince la partita solo nel caso in cui faccia un punto con tutti i tre lanci successivi. Essendo i lanci degli eventi indipendenti, la sua probabilità di vittoria è $(1/2)^3 = 1/8$.
Problema proposto da Carmelo Di Stefano.

(13) La risposta corretta è (C).
La bottiglia contiene inizialmente 800 ml di acqua e 200 ml di succo d'arancia. Dopo aver sostituito x ml di bibita con del succo d'arancia, la bibita conterrà $800 - 4x/5$ ml di acqua. Affinché l'acqua sia la metà del contenuto della bottiglia, deve essere $800 - 4x/5 = 500$, da cui $x = 1500/4 = 375$.
Problema proposto da Carmelo Di Stefano.

(14) La risposta corretta è (B).
Indichiamo con O il centro della circonferenza circoscritta al trapezio, con H il punto medio di AB e con K il punto medio di CD. Con il teorema di Pitagora si ottiene (misurando in m) $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ e $OK = \sqrt{OC^2 - CK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. L'altezza del trapezio è quindi $OH + OK = 12 + 5 = 17$ e la sua area è $\frac{(24+10)\cdot 17}{2} = 289$.
Problema proposto da Camilla Casamento Tumeo.

(15) La risposta corretta è (D).
Caterina scrive 9 numeri di una cifra, per un totale di 9 cifre. Poi 90 numeri di due cifre, quelli tra 10 e 99 - per un totale di 180 cifre. A questo punto, avrà scritto 189 cifre, e rimarranno $2017 - 189 = 1828$ cifre da scrivere per arrivare alla 2017^a.
I numeri successivi sono di tre cifre. Poiché $1828 = 3 \cdot 609 + 1$, la cifra nella 2017^a posizione sarà la prima cifra del seicentodecimo numero di tre cifre. Tale numero è 709, e la sua prima cifra è 7.
Problema proposto da Carmelo Di Stefano.

(16) La risposta corretta è (A).
Il numero di zeri finali di un numero è il minimo tra l'esponente di 2 e quello di 5 nella sua fattorizzazione in primi. Iniziamo calcolando l'esponente di 5 presente nella fattorizzazione in primi di ciascun numero scritto, ricordando che in un prodotto gli esponenti si sommano. Sappiamo che nella prima riga gli esponenti di 5 sono $0, 0, 0, 0, 1, 0, 0$, e quindi nella seconda $0, 0, 0, 1, 1, 0$; nella terza $0, 0, 1, 2, 1$; nella quarta $0, 1, 3, 3$; nella quinta $1, 4, 6$; nella sesta $5, 10$; infine nella settima 15. Procedendo allo stesso modo con il primo 2, si vede facilmente che la potenza di 2 che divide l'ultimo numero è ben superiore a 2^{15}. Il numero scritto nel cerchio più in basso termina quindi con esattamente 15 zeri.
Problema proposto Giovanni Barbarino.

N.B. Come d'abitudine, i problemi proposti sono stati, oltre che controllati e selezionati, in molti casi ampiamente modificati o riformulati dai responsabili della gara. Pertanto, nell'indicare i nominativi degli autori delle proposte, resta inteso che i responsabili sia della scelta dei quesiti, sia di eventuali errori, imprecisioni o formulazioni criticabili sono da individuarsi esclusivamente nei responsabili stessi della gara ed in nessuna misura negli autori delle proposte, che anzi vogliamo ringraziare per il loro notevole contributo, la ricchezza degli spunti offerti, l'originalità e la qualità delle proposte presentate.

I responsabili dei Giochi di Archimede,
Alessandro D'Andrea, Paolo Francini, Andrea Sambusetti