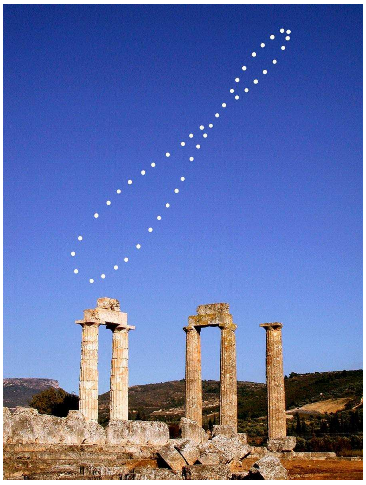
La lemniscata

1) IL FASCINO DEL METODO SCIENTIFICO

L'uomo da sempre ha cercato di trovare spiegazioni logico-matematiche nei fenomeni osservati, perché in questo modo si sente quasi in grado di riuscire a controllare ciò che succede. Appena guarda con un semplice telescopio però, si accorge che l'osservazione può essere ingannevole se fatta in modo superficiale. Ogni speculazione può essere migliorata, raffinata, o rivisitata.

Voglio fare un esempio. Gli antichi guardarono il cielo e, vedendo che il Sole compiva ai loro occhi un arco perfetto, pensarono che fosse quest'ultimo a girare intorno a loro e, quindi, anche intorno alla Terra. Un giorno Copernico guardò il cielo proprio come avevano fatto gli antichi prima di lui, e capì che tutto era sbagliato. Era il Sole ad essere il centro, il fulcro rotatore di tutti i corpi del sistema solare. Un giorno uno studioso guardò il cielo come avevano fatto gli antichi e Copernico prima di lui e decise di fare un esperimento "intrappolando" l'immagine del Sole tutti i giorni, alla stessa ora, dalla medesima posizione. Dopo un anno, sovrapponendo i risultati ottenuti, un "oh di stupore" si levò nel cielo, proprio come quello che gli antichi fecero volgendo per la prima volta gli occhi verso l'alto, o quello che Copernico fece quando arrivò alla sua intuizione. Ecco quello che lo studioso ottenne e che mostrò a tutti……

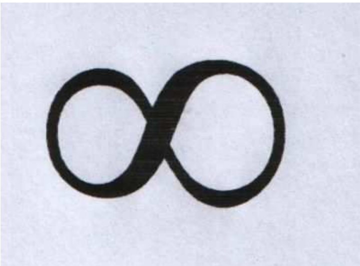


……… una lemniscata.

E' proprio tale tipo di curva che vorrei analizzare in quanto è l'esempio che ancora una volta la natura è in gradi di stupirci con la sua rigorosità. Le regole che coinvolgono il mondo, l'universo e noi, in prima persona, non sono sempre palesi. Una bomba dopo l'altra le scoperte sono scoppiate a raffica, con intervalli più lenti nel passato e più concentrate nell'ultimo secolo grazie agli strumenti moderni. E' così che un passo alla volta l'uomo, con il suo desiderio di conoscenza, cerca di dominare la natura attraverso la matematica e le sue regole. Conoscere è potere.

2) APPROFONDIAMO…CHE COS'E' UNA LEMNISCATA?

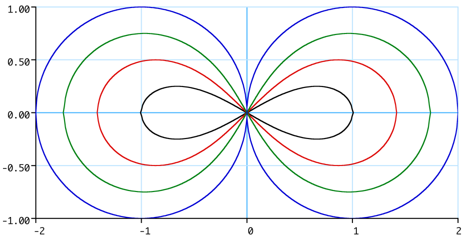
La lemniscata è una curva il cui grafico genera un curva simile al simbolo dell'infinito.



→LA LEMNISCATA DI BERNOULLI

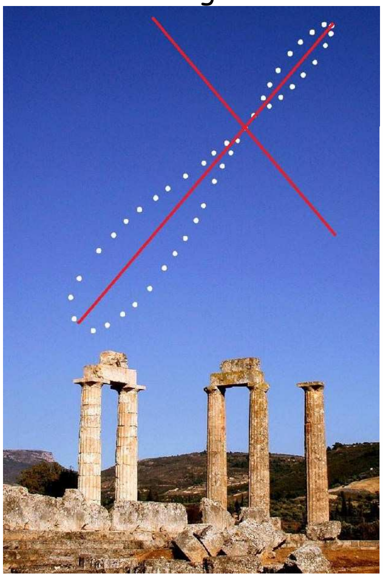
Bernoulli la descrisse come una variazione del metodo di costruzione di un ellisse; infatti, mentre quest´ultima è il luogo dei punti per cui la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante, la lemniscata è il luogo dei punti per i quali il prodotto di queste distanze è costante. Detti F e F' i fuochi, a la loro distanza dal centro, la lemniscata di Bernoulli è il luogo dei punti P tali che: $\overline{PF} \cdot \overline{PF'} = a^2$ dove a^2 è la costante, ovvero il quadrato della semi distanza tra i due fuochi.

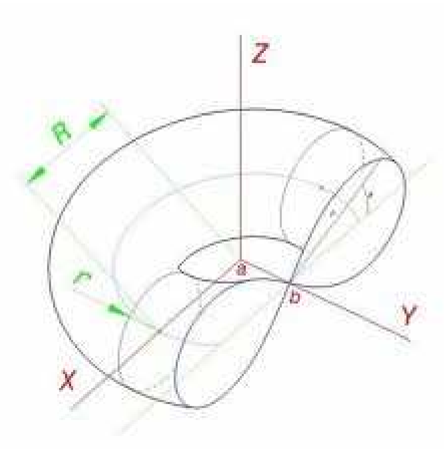
→LEMNISCATA DI BOOTH



L’equazione della curva è la seguente $(x^2+y^2)^2+4y^2=4c(x^2+y^2)$. Nel caso in cui $c > 1$, prende la forma di un singolo ovale, quando $0 < c < 1$ forma una lemniscata, cioè una curva a forma di otto, infine se $c = 1$ la curva si riduce a due circonferenze tangenti, mentre quando $c < 0$ la figura non ha punti reali.

→LEMNISCATA (o analemma) descritta dal Sole nel cielo nell’arco di un anno solare. Questo “percorso” individua una precisa posizione del sole sulla sfera celeste in una determinata ora del giorno per tutta la durata dell’anno. La sua forma non è individuabile in nessuna lemniscata studiata dai matematici sui grafici cartesiani in quanto non è simmetrica, come vedremo, né rispetto all’asse delle ascisse né rispetto a quello delle ordinate. Possiamo però tracciare un grafico in modo da individuare meglio la curva.



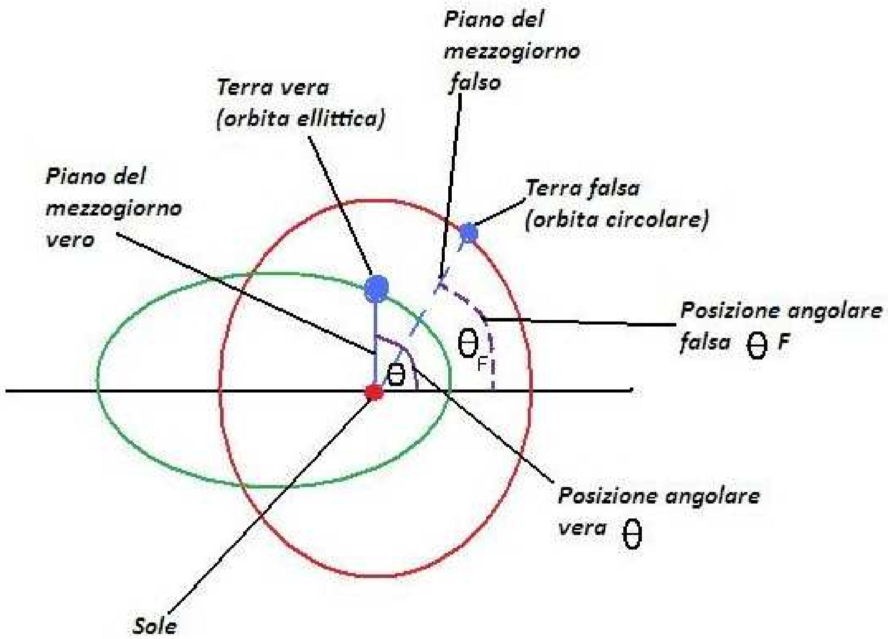


3) DESCRIZIONE DELL’ESPERIMENTO

La lemniscata è una curva che si ottiene fotografando la posizione del Sole nel cielo ad intervalli regolari ravvicinati (per esempio una volta la settimana o tutti i giorni dell’anno) dalla stessa posizione per un anno intero. L’ esperimento consiste nel trovare l’equazione della curva avendo a disposizione le coordinate della posizione del Sole su un paino cartesiano, in determinati giorni dell’anno. Sull’asse delle y viene rappresentata l’altezza del Sole sull’equatore celeste, cioè la declinazione solare. Questi valori variano fra +23°27’ e -23°27’ cioè l’inclinazione dell’asse

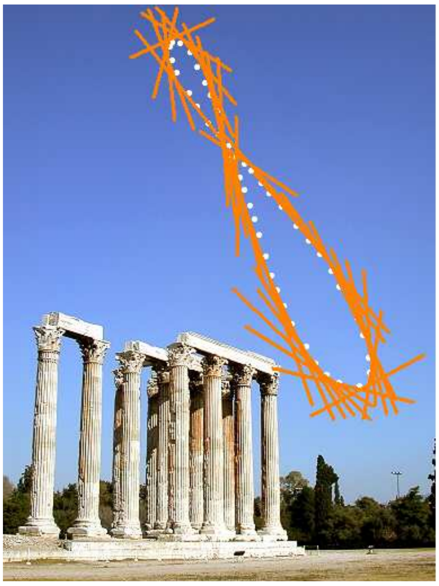
terrestre rispettivamente nel solstizio d'estate e d'inverno. L'asse verticale separa i ritardi dagli anticipi. I quattro punti in cui la curva interseca l'asse delle ordinate, cioè quando il mezzogiorno vero coincide con il mezzogiorno medio, sono il 15 aprile, 14 giugno, 31 agosto e 14 dicembre. Sull'asse delle ordinate è invece rappresentata l'equazione del tempo. Il Sole vero può assumere dei valori compresi fra i 14 minuti di anticipo e 14 minuti di ritardo.
Ma cos'è l'equazione del tempo? Si sa che la Terra, affinché si compia un giorno solare completo, deve fare un giro di 360° su se stessa. Questo però non è abbastanza, perché deve ancora ruotare di circa 1°, quindi in totale di 361°, dato che contemporaneamente sta girando anche intorno al Sole. Se questa quantità fosse invariabile non ci sarebbe distinzione fra il "mezzogiorno solare" e quello dei nostri orologi. Invece, dato che la distanza Terra-Sole varia continuamente, noi possiamo distinguere due velocità diverse e quindi due effetti ben distinti. Questa differenza viene chiamata Equazione del Tempo (ET) ed è la somma fra l'equazione del tempo di origine orbitale (ETo), causata dall'eccentricità terrestre, e l' equazione del tempo di origine assiale (ETa) cioè dovuto all'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano dell'orbita(essa è differenza fra l'angolo di rivoluzione e quello di rotazione del piano del mezzogiorno intorno all'asse terrestre che risulterebbe nulla se l'orbita non fosse inclinata).

ET= ETo + ETa



Osservando la lemniscata nel cielo da diverse posizioni sulla Terra, noteremo che varia non solo la sua altezza sull'orizzonte ma anche la sua inclinazione. La sua pendenza dipende dalla latitudine: all'equatore compare alta sullo zenit sopra la testa dell'osservatore, con un angolo di 90° fra l'ipotetico asse delle y e l'orizzonte, mentre ai poli è coricata sull'orizzonte spaziando un angolo di 90° fra l'ipotetico asse delle x e la linea di terra. Nota l'equazione dell' analemma e la sua altezza rispetto all'orizzonte possiamo calcolare la latitudine del punto di osservazione e viceversa.
Il tentativo di questa esperienza è quello di ricavare l'equazione della lemniscata partendo dai dati a disposizione, cioè le coordinate della curva sul grafico cartesiano. La questione non è semplice perché i calcoli sono complicati e gli errori di approssimazione inevitabili. Ci sono molte modalità per raggiungere l'equazione della curva:

a) TRAMITE INVILUPPO cioè dati un insieme di punti che formano una curva o una serie di curve piane, e trovando la tangente a ciascun punto, posso trovare la famiglia di rette tramite il parametro t, e di conseguenza l'equazione. La più semplice espressione analitica di un inviluppo di curve nel piano (x,y) è data dalla coppia di equazioni F (x,y,t)=0

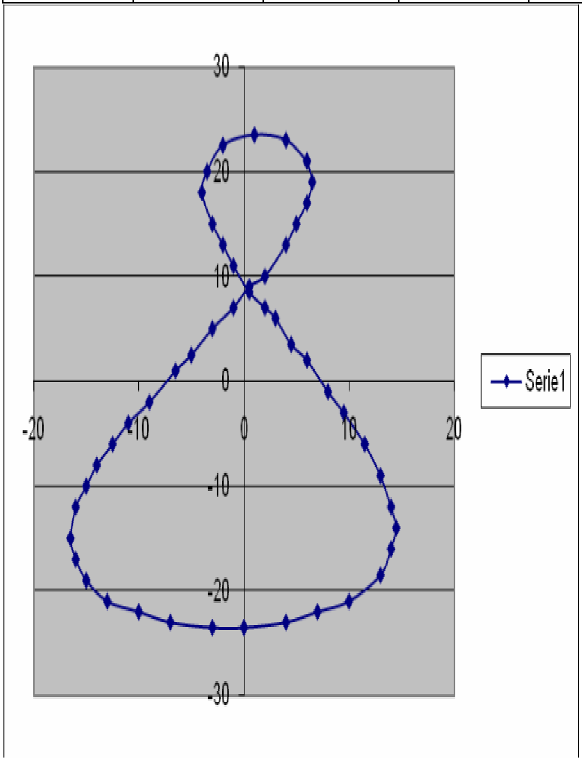


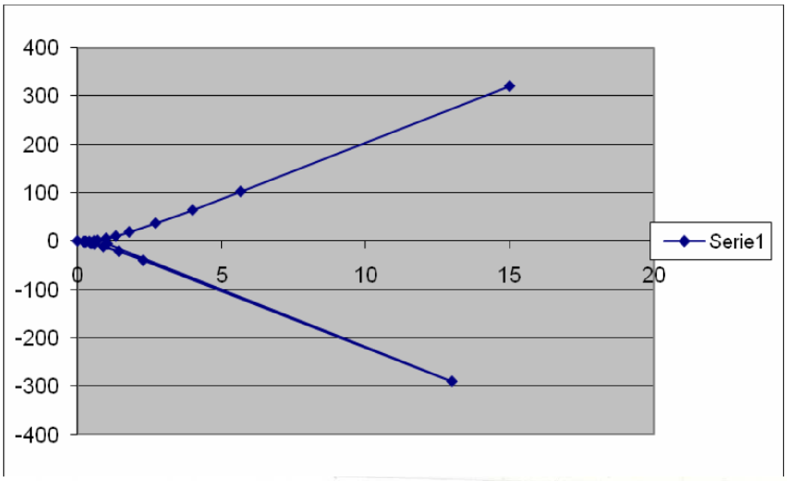
b)TRAMITE FORMULE UTILIZZATE PER LA COSTRUZIONE DELLE MERIDIANE infatti attraverso formule matematiche appropriate è possibile giungere all'obiettivo prefissato con un buon grado di approssimazione.

4) DATI ed ELABORAZIONE DEI DATI

x (min)	y (gradi)	m tang	q tang	m traslato	q traslato
6	21			15	320
6,5	19	IMPO	#DIV/0!	5,666667	102,3333
6	17	2,667	1	4	64
5	15	2,000	5	2,714286	37
4	13	1,667	6,333	1,8	18,8
2	10	1,143	7,714	1,333333	10,33333
0,5	9	1,000	8,500	1	5,5
-1	7	1,143	8,143	0,7	1,4
-3	5	1,125	8,375	0,583333	0,25
-5	2,5	1,143	8,214	0,416667	-1
-6,5	1	1,125	8,313	0,3	-1,6
-9	-2	1,111	8,000	0,3	-1,7
-11	-4	1,143	8,571	0,222222	-1,44444
-12,5	-6	1,333	10,667	0,25	-1,875
-14	-8	1,600	14,400	0,285714	-1,71429
-15	-10	2,000	20,000	0	0
-16	-12	3,333	41,333	0,25	-2,125
-16,5	-15	IMPO	#DIV/0!	0,444444	-3,88889
-16	-17	-2,667	-59,667	0,5	-4,5
-15	-19	-1,333	-39,000	0,6	-6
-13	-21	-0,600	-28,800	0,9	-11,2
-10	-22	-0,333	-25,333	1,444444	-21,3889
-7	-23	-0,214	-24,500	2,285714	-39,9286
-3	-23,5	-0,071	-23,714	13	-290
0	-23,5	0,071	-23,500	1,042553	-5,97872
4	-23	0,214	-23,857		
7	-22	0,333	-24,333		
10	-21	0,583	-26,833		
13	-18,5	1,250	-34,750		

14	-16	3,000	-58,000		
14,5	-14	#DIV/0!	#DIV/0!		
14	-12	-3,333	34,667		
13	-9	-2,400	22,200		
11,5	-6	-1,714	13,714		
9,5	-3	-1,429	10,571		
8	-1	-1,429	10,429		
6	2	-1,286	9,714		
4,5	3,5	-1,333	9,500		
3	6	-1,400	10,200		
2	7	-1,000	9,000		
0,5	8,5	-1,333	9,167		
-1	11	-1,800	9,200		
-2	13	-2,000	9,000		
-3	15	-2,500	7,500		
-4	18	-10,000	-22,000		
-3,5	20	2,250	27,875		
-2	22,5	0,778	24,056		
1	23,5	0,083	23,417		
4	23	-0,500	25,000		
6	21	-1,600	30,600		
6,5	19	#DIV/0!	#DIV/0!		
6	17	2,667	1,000		
5	15	2,000	5,000		
4	13	1,667	6,333		
2	10	1,143	7,714		
0,5	9	5,000	6,500		





$$\begin{cases} x=-9.87\sin(2g(N-81))+7.67\sin(g(N-1)) \\ y=23.45\sin(g(N-81)) \end{cases}$$

$$\alpha=g(N-81) \quad g(N-1)=\alpha+80g$$

$$\begin{cases} x=-9.87\sin(2\alpha)+7.67\sin(\alpha+80) \\ y=23.45\sin\alpha \end{cases}$$

$$\delta=23.45 \quad \sin\alpha=\frac{y}{\delta} \quad \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{\delta^2}}$$

$$x=-9.87*2\sin\alpha\cos\alpha+7.67(\sin\alpha\cos(80g)+\cos\alpha\sin(80g))$$

$$x=-9.87*2\frac{y}{\delta}\left(\pm\sqrt{\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}}\right)+7.67\left(\frac{y}{\delta}\cos(80g)\pm\sqrt{\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}}\sin(80g)\right)$$

$$x=-19.74\frac{y}{\delta}\left(\pm\sqrt{\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}}\right)+7.67\frac{y}{\delta}\cos(80g)\pm7.67\sqrt{\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}}\sin(80g)$$

$$x-7.67\frac{y}{\delta}\cos(80g)=-19.74\frac{y}{\delta}\left(\pm\sqrt{\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}}\right)\pm7.67\sqrt{\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}}\sin(80g)$$

$$x^2+7.67^2\frac{y^2}{\delta^2}\cos^2(80g)-15.34\frac{\cos(80g)}{\delta}xy=389.67\frac{y^2}{\delta^2}\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}+58.829\sin^2(80g)\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}-302.81\frac{\sin(80g)}{\delta}\frac{\delta^2-y^2}{\delta^2}y$$

$$x^2+7.67^2\frac{y^2}{\delta^2}\cos^2(80g)-15.34\frac{\cos(80g)}{\delta}xy=389.67\frac{y^2}{\delta^2}-389.67\frac{y^4}{\delta^4}+58.829\sin^2(80g)-58.829\sin^2(80g)\frac{y^2}{\delta^2}-302.81\sin(80g)\frac{y}{\delta}+302.81\sin(80g)\frac{y^3}{\delta^3}$$

$$\frac{\cos(80g)}{\delta}=0.0082 \qquad \frac{\sin(80g)}{\delta}=0.0418$$

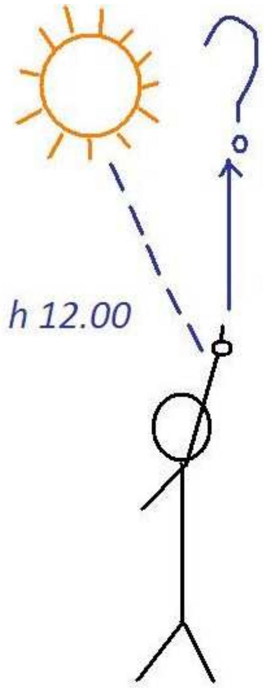
$$x^2+0.00396y^2-0.126xy=0.709y^2-0.00129y^4+56.6501-0.1028y^2-12.657y+0.023y^3$$

$$x^2-0.126xy=-0.00129y^4+0.023y^3+0.602y^2-12.657y+56.65$$

5) CAUSE

INCLINAZIONE DEGLI ASSI:

Cosa succederebbe se la Terra non fosse inclinata di 23°30'? Il movimento che vedremmo compiere nel cielo sarebbe semplicemente una linea orizzontale.



Come mai il Sole non si trova esattamente sulla testa dell'omino?

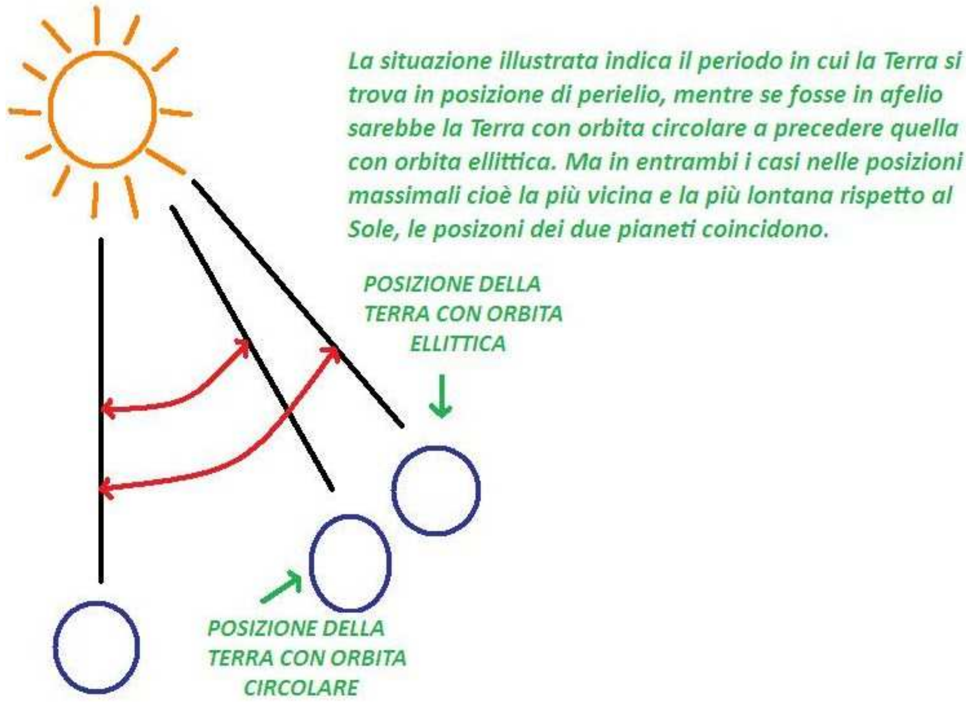
Il Sole varia la sua posizione nell'arco dell'anno e la differenza fra il luogo dove dovrebbe essere e la sua posizione attuale è detta EQUAZIONE DEL TEMPO.

Come nel nostro caso, se ci trovaimo nell'emisfero boreale e la "nostra stelle" e più ad Est rispetto a dove dovrebbe essere allora l'equazione del tempo sarà negativa. E' invece positiva se la sua posizione è più ad Ovest. Come sappiamo però il Sole non varia solo fra queste due posizioni cardinali ma anche può essere più o meno alto sull'orizzonte. In entrambi i casi la sua posizione dipende dalle nostre coordinate sulla Terra cioè dalla nostra posizione, dal periodo dell'anno in cui ci troviamo e di conseguenza l'angolazione dell'asse rispetto al piano dell'eclittica.

ORBITA ELLITTICA: in accordo con la prima legge di Keplero noi sappiamo che i pianeti si muovono su orbite ellittiche delle quali il Sole occupa uno dei due fuochi. Dalla prima legge, ne deduciamo la seconda cioè che il pianeta nel moto di rivoluzione compie aree uguali in tempi uguali. Essendo che la Terra si trova sempre a distanze diverse dal Sole anche la sua velocità varia in rapporto alla vicinanza rispetto alla stella, maggiore in perielio e minore in afelio, anticipando o ritardando il passaggio dal meridiano del mezzogiorno medio.

Cosa succederebbe se l'orbita non fosse ellittica? Analizzando i cambiamenti in campo astronomico vediamo che se la sua orbita fosse circolare, la sua velocità sarebbe costante. Si può pensare a questo considerando come velocità "K=cost" la velocità media della Terra con orbita ellittica. Come abitanti del pianeta blu percepiremmo invece questo cambiamento con la scomparsa delle stagioni, il Sole che compie sempre lo stesso arco perfetto nel cielo e l'impossibilità di realizzare l'esperimento proposto dato che la lemniscata sparirebbe.

La figura ci mostra in contemporanea le due diverse posizioni della Terra a seconda della forma dell'orbita.

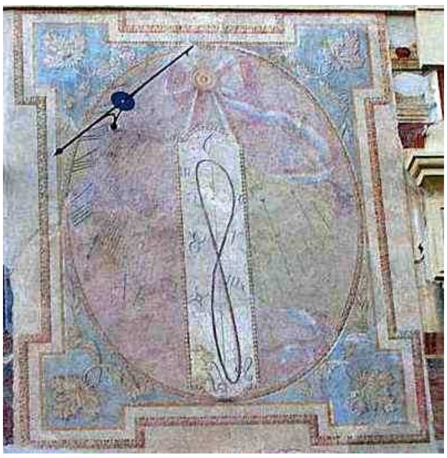


SUPPOSIZIONI

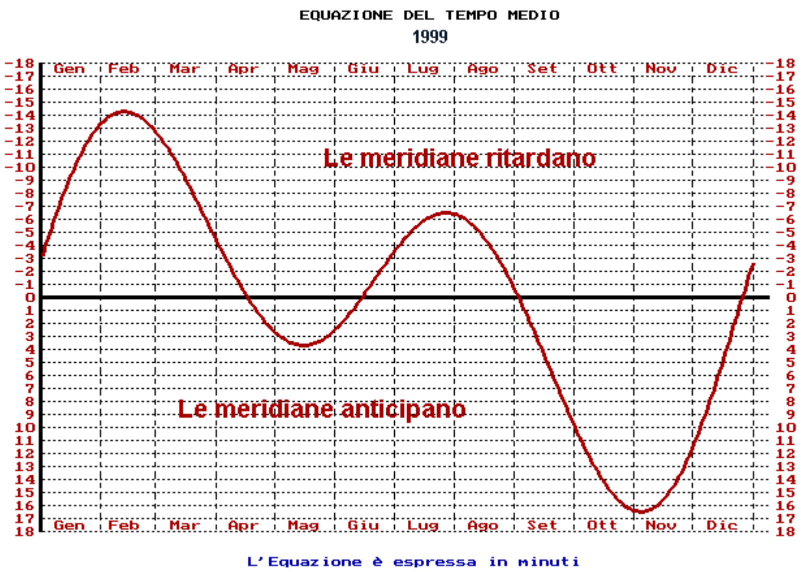
E' possibile che anche la precessione degli equinozi possa in parte contribuire o cambiare la forma della lemniscata in quanto è dovuta dall'attrazione gravitazionale che gli altri corpi che compongono il Sistema Solare esercitano sulla Terra, soprattutto il sole e la luna. Viene anche chiamato precessione luni-solare, cioè un moto conico che la terra compie in 26000 anni. Le forze di attrazione della Luna e del Sole tendono a raddrizzare l'asse di rotazione inclinato di 23°27'. Contemporaneamente però la Terra continua il suo moto di rotazione opponendosi alle due forze precedenti. Anche se i tempi di compimento di questo moto sono molto lunghi, possiamo comunque considerare che abbia una minima, ma possibile influenza su di essa

6) APPLICAZIONE: MERIDIANE

Avendo a disposizione le conoscenze necessarie quali l'equazione del tempo come somma degli effetti dell'eccentricità dell'orbita e l'inclinazione dell'asse terrestre, e leggi matematiche relative, otteniamo dati a sufficienza per poter disegnare la lemniscata, utilizzata per la progettazione delle meridiane.



meridiana di Mondovì Piazza in provincia di Cuneo



SI VEDRA' SOLO DALLA TERRA QUESTO ANALEMMA?

La risposta è no, infatti ben su 7(compresa la Terra) dei 9 pianeti si verifica lo stesso fenomeno anche se la curva varia leggermente. Noto infatti che le lemniscate degli ultimi 3 pianeti, Nettuno, Urano e Plutone sono molto simili a quella terrestre essendo però più simmetriche rispetto all'asse delle x. Saturno, Giove e Marte hanno delle curve più simili a variabili dell'ellisse ma considerate comunque analemmi. Per questo alcuni appassionati hanno provato a costruire una lemniscata riferita a Marte, naturalmente attraverso satelliti che hanno raccolto foto e dati.

SITOGRAFIA E BIBLIOGRAFIA

Wikipedia
www.analemma.com
Ricerca immagini google