Risoluzione numerica di equazioni differenziali: il metodo di Eulero

Equazioni differenziali del 1º ordine

Consideriamo l'equazione differenziale del **primo ordine** non omogenea:

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t) \tag{1}$$

Per determinare univocamente la soluzione y(t) dell’equazione (1) è necessario porre una condizione iniziale (CI), cioè fornire il valore della funzione y ad un certo tempo t_0:

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

La derivata y’(t) di una funzione può essere approssimata con il rapporto incrementale con h prossimo a 0:

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \tag{3}$$

Se quindi conosciamo il valore della funzione y nell’istante t_0 possiamo calcolare un’approssimazione della funzione y all’istante $t_0 + h$ nella maniera seguente:

$$y(t_0 + h) - y(t_0) = y'(t_0) \cdot h \tag{4}$$

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0) \cdot h \tag{5}$$

dove il valore di $y'(t_0)$ viene calcolato sostituendo $t = t_0$ nell’equazione differenziale (1):

$$y'(t_0) = f(t_0) - a(t_0)\,y(t_0) \tag{6}$$

Il valore così calcolato $y(t_0 + h)$ può ora essere utilizzato come nuovo valore di $y(t_0)$ per calcolare $y(t_0 + h)$ e ripetere. Questo procedimento genera una soluzione approssimata della funzione y(t) ed è detto **metodo di Eulero**.

Equazioni differenziali del 2º ordine

Consideriamo l'equazione differenziale del **secondo ordine** non omogenea:

$$y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = f(t) \tag{7}$$

Per determinare univocamente la soluzione y(t) dell’equazione (7) è ora necessario porre due condizioni iniziali (CI), cioè fornire il valore della funzione y e della sua derivata y’ ad un certo tempo t_0:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0 \tag{8}$$

La derivata seconda y’’(t) di una funzione può essere approssimata con il rapporto incrementale con h prossimo a 0:

$$y''(t) \approx \frac{y'(t+h) - y'(t)}{h} \tag{9}$$

Se quindi conosciamo il valore della derivata y’ nell’istante t_0 possiamo calcolare un’approssimazione della derivata y’ all’istante $t_0 + h$ nella maniera seguente:

$$y'(t_0 + h) - y'(t_0) = y''(t_0) \cdot h \tag{10}$$

$$y'(t_0 + h) = y'(t_0) + y''(t_0) \cdot h \tag{11}$$

dove il valore di $y''(t_0)$ viene calcolato sostituendo $t = t_0$ nell’equazione differenziale (7):

$$y''(t_0) = f(t_0) - a(t_0)\,y'(t_0) - b(t_0)\,y(t_0) \tag{12}$$

Conosciamo inoltre il valore della funzione y nell’istante t_0 e possiamo quindi calcolare un’approssimazione della funzione y all’istante $t_0 + h$ utilizzando la formula (5).
I valori così calcolato $y(t_0 + h)$ e $y'(t_0 + h)$ possono ora essere utilizzati come nuovi valore di $y(t_0)$ e di $y'(t_0)$ per calcolare $y(t_0 + h)$ e $y'(t_0 + h)$ e ripetere. Anche questo procedimento è detto **metodo di Eulero**.
N.B. In alcuni casi (l’esempio tipico è quello dell’oscillatore armonico) l’utilizzo della formula (5) genera un rapido aumento dell’errore nel calcolo di y con conseguente divergenza della soluzione numerica approssimata da quella esatta. Per ovviare al problema è sufficiente calcolare il valore di $y(t_0 + h)$ con la seguente:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0 + h) \cdot h \tag{5 bis}$$

Quindi per il calcolo del valore di $y(t_0 + h)$ non si fa uso della derivata $y'(t_0)$ calcolata al tempo t_0 ma di $y'(t_0 + h)$ ovvero della derivata calcolata al tempo $t_0 + h$. Questo procedimento è detto **metodo di Eulero modificato**.