

## Relazione fra energia e quantità di moto relativistiche

L'energia relativistica è:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

La quantità di moto relativistica è:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

Sottraendo al quadrato dell'energia il quadrato della quantità di moto moltiplicata per  $c^2$  otteniamo:

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 - \gamma^2 m_0^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4$$

Il risultato è un invariante relativistico essendo il prodotto del quadrato di  $m_0$  (massa a riposo) per  $c^4$ .

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Portando a secondo membro  $p^2 c^2$  otteniamo l'importante relazione fra energia e quantità di moto:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

La suddetta relazione ha una validità universale, poiché è applicabile a qualunque oggetto macroscopico o microscopico con qualsiasi valore di massa, anche nulla.

L'esempio più importante è quello dei fotoni, cioè i quanti di energia della radiazione elettromagnetica, dotati proprio di massa nulla. In tal caso la relazione fra l'energia di un fotone e la sua quantità di moto è:

$$E^2 = p^2 c^2 \quad \rightarrow \quad E = p c \quad \rightarrow \quad p = \frac{E}{c}$$

La corrispondente relazione classica fra energia cinetica e quantità di moto è priva di significato, se  $m=0$ :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Secondo la meccanica quantistica l'energia dei fotoni è data dalla relazione di Planck:

$$E = h f$$

dove  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$  è la costante di Planck ed  $f$  la frequenza della radiazione elettromagnetica. Quindi la quantità di moto dei fotoni è calcolabile come:

$$p = \frac{h f}{c}$$

Le suddette relazioni per l'energia e la quantità di moto dei fotoni hanno anch'esse validità universale essendo contemporaneamente formule quantistiche e relativistiche.