

che γ è 10^4 . Da questo punto di vista è una legge molto importante. La discussione svolta in questo capitolo ha dimostrato che si tratta di una conseguenza diretta dell'invarianza della carica.

5.9 INTERAZIONE TRA UNA CARICA IN MOVIMENTO E ALTRE CARICHE IN MOVIMENTO

5
*I campi generati
da cariche
in movimento*

Sappiamo che su una carica in movimento può agire una forza che dipende dalla velocità. Essa è associata a un *campo magnetico*, le cui sorgenti sono le correnti elettriche, cioè altre cariche in movimento. L'esperienza di Oersted dimostrava che le correnti elettriche possono esercitare una certa influenza sui magneti, ma a quell'epoca la natura di un magnete era completamente sconosciuta. Poco dopo Ampère e altri riuscirono a districare la situazione delle interazioni reciproche tra correnti elettriche, tipo l'attrazione che si può osservare tra due fili paralleli percorsi da correnti che fluiscono nello stesso verso. Questo condusse Ampère a formulare l'ipotesi che una sostanza magnetica contenga correnti elettriche permanenti. Sotto questa luce, l'esperienza di Oersted poteva venire interpretata come effetto della interazione tra la corrente «galvanica» nel filo e le correnti microscopiche permanenti capaci di attribuire all'ago magnetico la sua speciale proprietà. Ampère diede una formulazione matematica elegante e completa della teoria dell'interazione tra correnti costanti e dell'equivalenza fra una sostanza magnetizzata e un sistema di correnti permanenti. La sua brillante supposizione circa la reale natura del magnetismo nel ferro dovette attendere un secolo, più o meno, per ottenere la conferma definitiva.

Ampère e i suoi contemporanei non erano sicuri che le manifestazioni magnetiche delle correnti elettriche potessero derivare da qualche cosa *di più* del semplice trasporto di carica. Il moto di un oggetto carico elettrostaticamente potrebbe dare luogo a effetti simili a quelli prodotti da una corrente galvanica continua? Verso la fine del XIX secolo, la teoria di Maxwell fece pensare che la risposta doveva essere sì e la prima prova diretta fu ottenuta da Henry Rowland: ritorneremo sulla sua esperienza alla fine del capitolo 6.

Dalla nostra attuale posizione di vantaggio possiamo riconoscere nella interazione magnetica tra correnti elettriche un inevitabile corollario della legge di Coulomb. Se sono validi i postulati della relatività, se la carica elettrica è un invariante e se vale la legge di Coulomb, allora dobbiamo necessariamente incontrare quegli effetti che comunemente chiamiamo «magnetici». Essi si manifesteranno non appena esamineremo l'interazione elettrica tra una carica in movimento e altre cariche in movimento. Un sistema molto semplice spiegherà questa situazione.

Nel sistema «del laboratorio» (fig. 5.20 (a)) abbiamo una processione infinita di cariche positive che si muovono verso destra con velocità v_0 e, sovrapposta a questa, una processione di cariche negative che si muovono verso sinistra con la stessa velocità, in modulo. Si suppone che

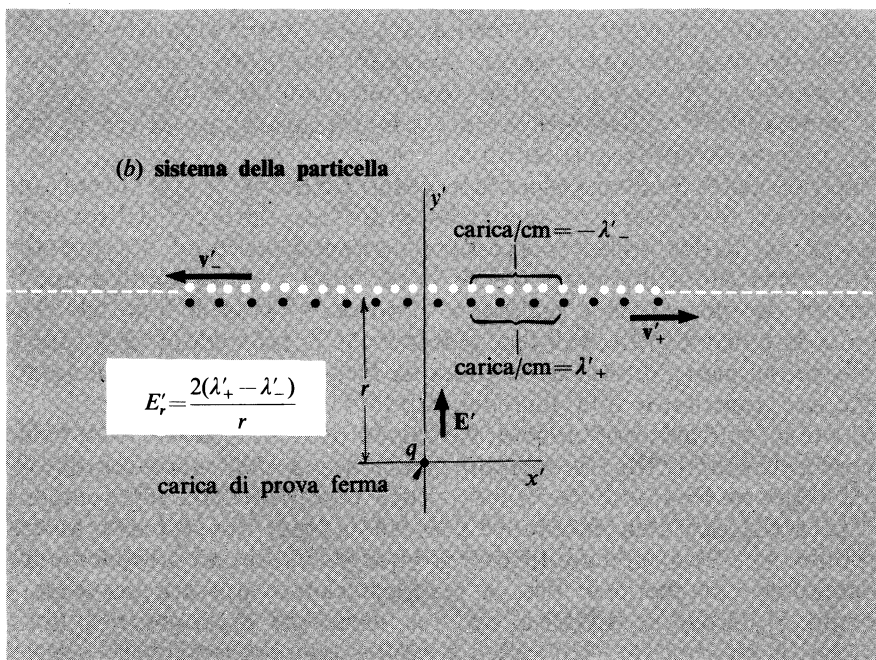
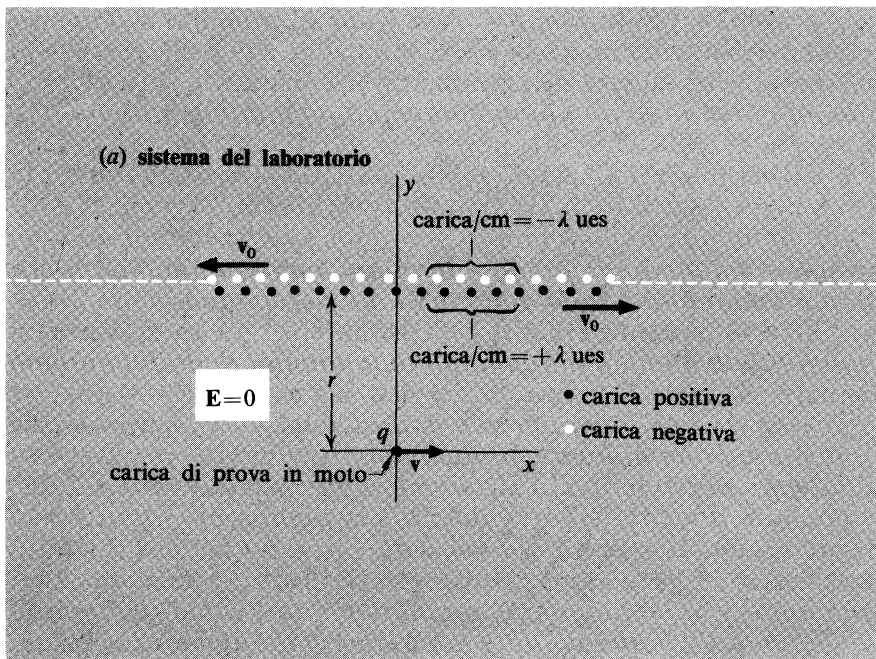


FIGURA 5.20 Distribuzioni lineari di cariche positive e negative in moto, osservate in due diversi sistemi di riferimento. (a) Le cariche negative si muovono verso sinistra, quelle positive verso destra, con velocità scalari uguali nel sistema del laboratorio. Nel sistema del laboratorio le densità sono uguali ma, nel sistema della particella in cui la carica esploratrice q è ferma, le densità lineari di carica non sono uguali.

queste cariche siano tanto numerose e a distanza così piccola l'una dall'altra da poter ignorare, alle distanze a cui ci interesseremo, il fatto che siano tra loro separate. Nella figura, per chiarezza, abbiamo disegnato le due processioni leggermente scostate. Per un sistema di questo genere non esiste alcun riferimento nel quale tutte le cariche siano in quiete. Supponiamo che la densità lineare di carica positiva, misurata nel sistema del laboratorio, sia λ , in ues/cm, e sia uguale alla densità lineare di carica negativa: quindi, in questo sistema è complessivamente nulla la densità lineare di carica e, di conseguenza, il campo elettrico \mathbf{E} è nullo, nel sistema del laboratorio. Ciò di cui disponiamo equivale a un filo non carico, percorso da una corrente elettrica costante. Se si trattasse di un filo metallico si muoverebbero solamente le cariche negative (elettroni), mentre quelle positive rimarrebbero ferme; noi abbiamo scelto un modello più simmetrico solo per semplificare leggermente la discussione.

Se il lettore dovesse muoversi con la stessa velocità delle cariche positive, scoprirebbe che la loro densità lungo la linea è diversa dalla precedente. La situazione è simile a quella che si ha nel condensatore della figura 5.19. Nel sistema del laboratorio, la distribuzione delle cariche positive doveva essere contratta nel verso positivo dell'asse x per il fattore $(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ e questo fa sì che la densità risultasse *maggiore* di quella che si avrebbe in un sistema in cui le cariche positive fossero in quiete. Dal momento che abbiamo specificato che la densità nel sistema del laboratorio è λ , la densità delle cariche positive nel sistema in quiete deve essere minore, cioè $\lambda(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$. Lo stesso ragionamento vale per la densità lineare delle cariche negative rispetto al *loro* sistema di quiete. Questo risultato ci sarà utile tra poco. Una carica di prova ferma a una certa distanza r dal «filo» non è soggetta ad alcuna forza perché il campo elettrico è nullo. Poiché in questo paragrafo siamo interessati alla forza che agisce su una carica di prova *in movimento*, supponiamo che la carica q si muova verso destra con velocità v , rispetto al sistema del laboratorio. Quale forza, misurata in questo sistema, agisce allora sulla carica? Abbiamo imparato come si può rispondere a domande di questo tipo: ci si mette in un sistema di coordinate solidale con la carica di prova q ; in questo sistema «della particella» la carica q è in quiete e la forza a cui è soggetta è determinata dal campo elettrico in quel sistema.

Perché vi potrebbe essere un campo elettrico nel sistema «della particella», quando non esiste in quello «del laboratorio»? La ragione è che i valori delle densità di carica lineari nel sistema «della particella», che indicheremo rispettivamente con λ'_+ e λ'_- , *non sono uguali*. Osservato dal sistema «della particella», il filo appare carico! Possiede un eccesso di cariche negative per ogni unità di lunghezza (*).

(*) Ci si può porre questa domanda: *Che cosa si può dire circa l'invarianza della carica?* Abbiamo sempre sottolineato il fatto che la carica totale limitata da un certo confine rimane la stessa, qualunque sia il sistema di riferimento in cui la si misura. In questo caso, nessun contorno può racchiudere la carica totale contenuta nel filo, perché questo si estende all'infinito; ciò che accade alle sue «estremità» non ha qui nessun interesse.

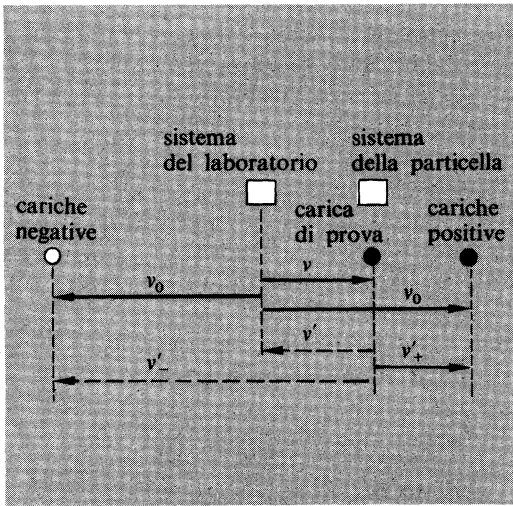


FIGURA 5.21 Uno schema nella «spazio delle velocità» che aiuta a seguire le cose. (La composizione delle velocità, in ogni modo, deve essere fatta relativisticamente). Le varie v indicano i moduli delle velocità, grandezze positive, qui e nelle equazioni (35-44).

Per poterlo calcolare dobbiamo conoscere la velocità delle cariche positive e quella della cariche negative nel nuovo sistema di riferimento. È evidente che queste non tendono a diventare uguali: infatti, poiché il sistema «della particella» deve muoversi verso destra, se lo si osserva dal laboratorio, esso tende a raggiungere le cariche positive e ad allontanarsi ancor più velocemente da quelle negative. La figura 5.21 ci aiuterà ad identificare le velocità che dobbiamo considerare. Non abbiamo intenzione di fare alcuna approssimazione; quindi, per determinare le velocità v'_+ e v'_- delle cariche positive e negative nel sistema «della particella», dobbiamo servirci della formula relativistica per la composizione delle velocità, e otteniamo:

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} \quad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 v/c^2} \quad (35)$$

A questo punto, sono utili i simboli β e γ . Poniamo: $\beta_0 = v_0/c$, $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$; $\beta'_+ = v'_+/c$, $\gamma'_+ = (1 - \beta'^2_+)^{-1/2}$, e così via. Le (35), usando questo simbolismo, diventano:

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \quad \beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta} \quad (36)$$

206

Le due distribuzioni di carica subiranno contrazioni di Lorentz *diverse* e questo è il punto cruciale del problema. Possiamo determinare la densità lineare delle cariche positive partendo da quella misurata nel sistema a riposo delle cariche positive stesse e applicando il fattore di contrazione al sistema «della particella». Abbiamo calcolato in precedenza la densità delle cariche positive rispetto al loro sistema di quiete: era $\lambda (1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$, ovvero, con il nuovo simbolismo, λ/γ_0 . Il fattore per cui la distribuzione si contrae linearmente, nel

sistema della particella è $1/\gamma'_+$, quindi il suo reciproco, γ'_+ , è il fattore di cui aumenta la densità di carica lineare rispetto a quella osservata nel sistema in cui le cariche positive sono ferme. Allora, la densità lineare di carica positiva nel sistema della particella deve essere:

$$\lambda'_+ = \gamma'_+ \left(\frac{\lambda}{\gamma_0} \right) \quad (37)$$

Analogamente, la densità di carica negativa nel sistema della particella è:

$$\lambda'_- = \gamma'_- \left(\frac{\lambda}{\gamma_0} \right) \quad (38)$$

Servendoci delle (36) per eliminare γ'_+ e γ'_- da queste equazioni, vogliamo determinare la densità di carica lineare risultante, $\lambda'_+ - \lambda'_-$. Potremmo dare l'impressione di stare esagerando con l'algebra, ma la sostituzione conduce immediatamente a una attraente semplificazione, in questo modo:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0} (\gamma'_+ - \gamma'_-)$$

Sostituendo le (36) si ottiene:

$$\begin{aligned} \gamma'_+ - \gamma'_- &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta} \right)^2}} = \\ &= \frac{1 - \beta_0 \beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2 - \beta^2 + \beta_0^2 \beta^2}} - \frac{1 + \beta_0 \beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2 - \beta^2 + \beta_0^2 \beta^2}} = \\ &= \frac{-2\beta_0 \beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} = -2\beta_0 \beta \gamma_0 \gamma \end{aligned} \quad (40)$$

Dunque, la densità di carica lineare risultante è:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = -2\lambda\beta_0\beta\gamma = -\frac{2\lambda\gamma v v_0}{c^2} \quad (41)$$

Questa carica elettrica lineare nel sistema della particella dà luogo allo stesso campo elettrico che produrrebbe una qualsiasi carica lineare della medesima densità. Per ottenere il noto risultato che esiste un campo elettrico radiale di intensità:

$$E'_r = \frac{2(\lambda'_+ - \lambda'_-)}{r} = -\frac{4\lambda\gamma v v_0}{rc^2} \quad (42)$$

basta applicare la legge di Gauss a un cilindro che circondi la linea. Dunque, la forza che agisce sulla carica di prova positiva q è diretta radialmente verso l'interno, vale a dire, nel verso positivo dell'asse y' rispetto al sistema della particella, e la sua intensità è:

$$F'_y = \frac{4q\gamma\lambda v v_0}{rc^2} \quad (43)$$

5
I campi generati
da cariche
in movimento

Si tratta di una forza perpendicolare alla direzione del moto, misurata nel sistema della particella. Se la misuriamo nel sistema del laboratorio, la sua intensità risulterà diversa: applicando la regola di trasformazione delle forze (equazioni (31)), si ottiene $F_y = (1/\gamma)F'_y$ e questo risultato fa scomparire il γ . Concludendo, l'intensità della forza che agisce sulla carica q , che si muove con velocità v parallelamente al «filo» nel sistema di laboratorio, è:

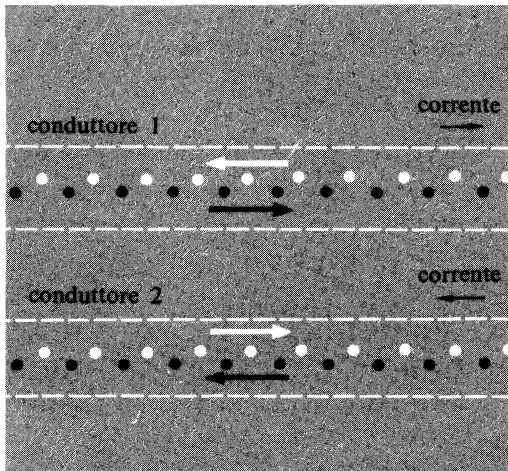
$$F_y = \frac{4q\lambda v v_0}{rc^2} \quad (44)$$

Ebbene, la quantità $2\lambda v_0$, che potremmo mettere in evidenza nella equazione (44), se lo volessimo, rappresentata la corrente elettrica nel «filo» in ues/sec. Cioè λv_0 è la «rapidità» con cui la carica positiva viene trasportata verso destra — la quantità di carica positiva che la processione fa passare per un determinato punto in un secondo — e i portatori di carica negativa contribuiscono in eguale misura alla corrente, procedendo verso sinistra. Se indichiamo con I questa corrente, l'intensità della forza che agisce sulla carica in movimento è data da:

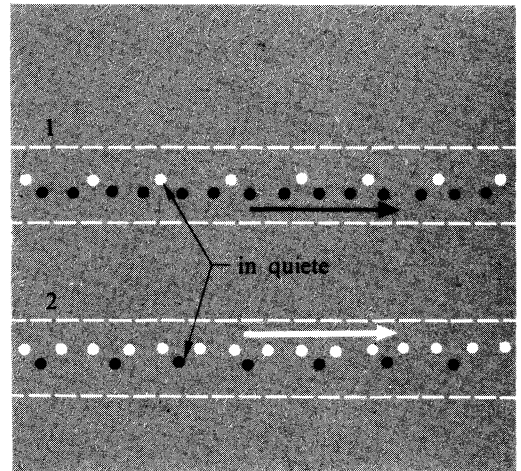
$$F = \frac{2qvI}{rc^2} \quad (45)$$

208

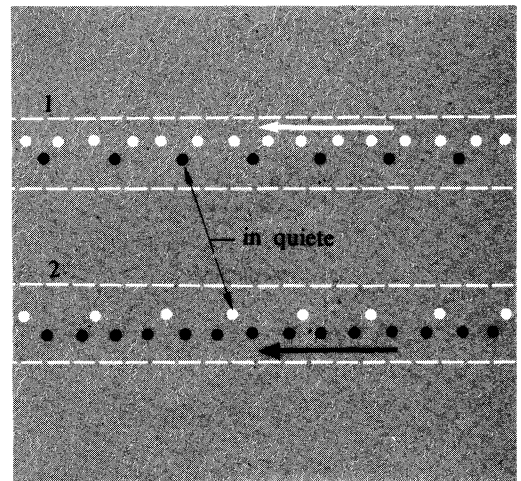
È notevole il fatto che la forza che agisce sulla carica di prova in moto non dipenda separatamente dalla velocità o dalla densità dei portatori di carica nel filo, ma solamente da quella loro combinazione che determina il trasporto di carica risultante. Se abbiamo una determinata corrente, diciamo 10^7 ues/sec, pari a 3,3 mA, non ha alcuna importanza il fatto che essa sia costituita da elettroni di alta energia che si muovono con velocità pari al 99 % di quella della luce, da elettroni che si muovono in un metallo e in maniera disordinata, termicamente con una lieve tendenza in un'unica direzione, oppure da ioni carichi in soluzione, dove quelli positivi si muovono in un verso e quelli negativi nel verso opposto. Inoltre, la forza che agisce sulla carica di prova è esattamente proporzionale alla velocità della carica di prova stessa, dal momento che abbiamo derivato l'equazione (45) senza limitarci in alcun modo alle piccole velocità, sia per i portatori di carica nel filo che per la carica di prova: l'equazione (45) è corretta, senza limitazioni.



(a)



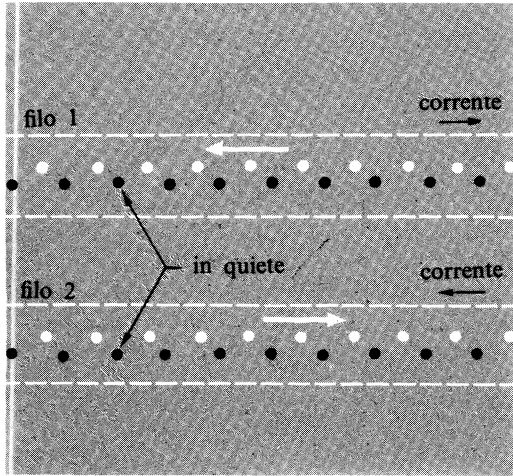
(b)



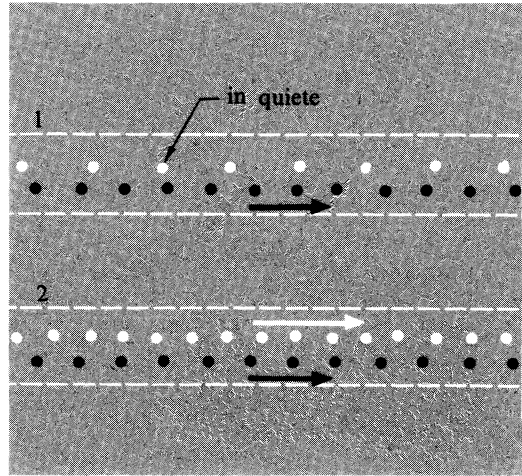
(c)

FIGURA 5.22 (a) Sistema del laboratorio: due conduttori percorsi da corrente in verso opposto. La corrente è dovuta sia a ioni positivi che negativi, in moto con velocità di ugual modulo. (b) Sistema a riposo degli ioni negativi nel conduttore 1 e degli ioni positivi nel conduttore 2. (c) Sistema a riposo degli ioni positivi nel conduttore 1 e degli ioni negativi nel conduttore 2.

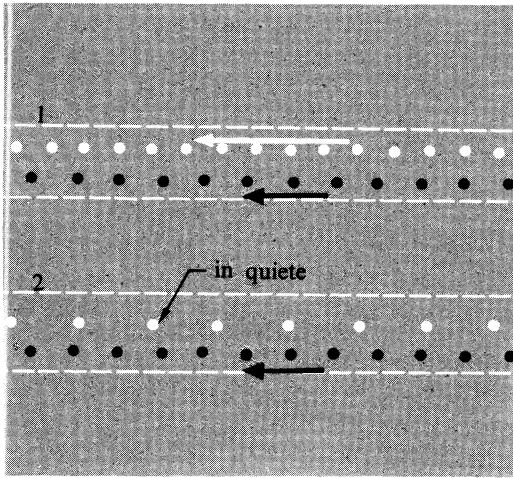
Vediamo in quale modo questo risultato spiega la repulsione reciproca che si manifesta fra conduttori percorsi da correnti in verso opposto, come abbiamo illustrato nella figura 5.1 (b) all'inizio di questo capitolo. Facciamo prima di tutto l'ipotesi che ciascun conduttore contenga un uguale numero di portatori di carica positiva e negativa, che si muovono in versi opposti con la stessa velocità. Nel sistema del laboratorio abbiamo qualcosa di simile al disegno della figura 5.22 (a). Spostandoci in un sistema di riferimento che sia solidale con le cariche negative nel conduttore 1 e con quelle positive nel conduttore 2, vedremo la situazione come ci appare nella figura 5.22 (b). In questo sistema, il conduttore 1 ha un eccesso di carica positiva per unità di lunghezza: quindi *respinge* le cariche positive del conduttore 2. Analogamente, le cariche negative del conduttore 1 sono respinte dall'eccesso di carica negativa nel conduttore 2. Per determinare le forze che agiscono



(a)



(b)



(c)

FIGURA 5.23 (a) Sistema del laboratorio: due fili percorsi da corrente in verso opposto. Nei fili metallici la corrente è dovuta soltanto al moto degli ioni negativi (elettroni). (b) Sistema a riposo degli elettroni nel filo 1. Si osserva che nel filo 2 gli ioni positivi sono compresi, ma la distribuzione degli elettroni è contratta ancora di più. (c) Sistema a riposo degli elettroni nel filo 2. Come nel caso (b), l'altro filo appare, a questi elettroni fermi, carico negativamente.

210

sui portatori di carica che restano — quelli positivi in 1 e quelli negativi in 2 — passiamo al sistema di riferimento in cui «essi» sono in quiete (fig. 5.22 (c)). In questo sistema, è il conduttore 2 che si presenta con un eccesso di carica positiva e quindi le cariche positive nel conduttore 1 devono subire una azione repulsiva. Lo stesso ragionamento si applica alle cariche negative del conduttore 2. Quindi ogni portatore di carica subisce, rispetto al riferimento in cui è in quiete, una repulsione a causa dei portatori di carica contenuti nell'altro conduttore. Per determinare l'intensità corretta della forza nel sistema del laboratorio dovremmo ritrasformare la forza, così come abbiamo fatto nel passaggio dall'equazione (43) all'equazione (44). Ma il *segno* della forza non può cambiare: dunque, in laboratorio osserviamo una repulsione reciproca tra i conduttori.

Il modello che abbiamo appena descritto potrebbe rappresentare la conduzione in un elettrolita o in un gas ionizzato, anche se in generale i due tipi di portatori hanno valori della velocità piuttosto diversi. In un metallo, però, sono solamente i portatori di carica negativa (elettroni) che si muovono, mentre le corrispondenti cariche positive restano ferme nel reticolo: la figura 5.23 (a) rappresenta due fili di questo tipo percorsi da correnti in verso opposto, visti dal sistema del laboratorio. Poiché i fili sono elettricamente neutri, non esiste alcuna forza di natura elettrica dovuta all'altro filo, che agisca sugli ioni positivi che sono fermi nel sistema del laboratorio. Se ci trasferiamo in un sistema di riferimento in cui gli elettroni di un filo siano in quiete (fig. 5.23 (b)), troviamo che nell'altro filo la distribuzione degli elettroni subisce una contrazione di Lorentz maggiore di quella subita dalla distribuzione degli ioni positivi. La figura 5.23 (c) illustra una situazione analoga. Questo modello, perciò, descrive anche la repulsione fra correnti parallele che si muovono in verso opposto e illustra, in maniera qualitativa, la precedente affermazione secondo cui le forze che si manifestano tra le correnti dipendono solamente dalla quantità di corrente che circola e non dal modo in cui la carica viene trasportata. (Nel problema 5.15 è tracciata a grandi linee la dimostrazione generale di quanto abbiamo ora affermato).

In questo capitolo abbiamo visto che l'invarianza della carica implica l'esistenza di forze tra correnti elettriche. Questo non ci obbliga a considerare un fatto come causa dell'altro. Si tratta semplicemente di due aspetti dell'elettromagnetismo, le cui relazioni illustrano magnificamente la più generale delle leggi: la fisica è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Se dovessimo esaminare ogni sistema di cariche in movimento per mezzo di continue trasformazioni avanti e indietro tra diversi sistemi di riferimento, il nostro lavoro diventerebbe confuso e noioso. Esiste però un modo migliore: l'effetto complessivo di una corrente su una altra, oppure di una corrente su una carica in moto, può venire descritto in maniera completa e concisa introducendo un nuovo campo, il campo *magnetico*.