5.8 FORZA AGENTE SU UNA CARICA IN MOVIMENTO

L'equazione (12) ci dice a quale forza è soggetta una carica ferma nel campo prodotto da un'altra carica, che si muova con velocità costante. Ci poniamo adesso un problema: qual è la forza che agisce su una carica in movimento, che si muova nel campo generato da altre cariche? Esamineremo prima il caso di una carica che si muova attraverso il campo prodotto da cariche ferme: potrebbe trattarsi di un elettrone in moto tra le due piastre cariche di un oscilloscopio, oppure di una particella α che si muova nel campo coulombiano che esiste attorno a un nucleo atomico. Le sorgenti del campo, in ogni caso, sono tutte ferme rispetto a un sistema di riferimento che chiameremo «del laboratorio». In un certo punto e in un certo istante osserviamo, nel sistema del laboratorio, una particella dotata di carica q che si sta muovendo, in quell'istante, con velocità $\mathbf{v}$ attraverso il campo elettrostatico. Qual è la forza che agisce su q?
Il termine forza non è altro che il nome che si usa per indicare la rapidità con cui la quantità di moto varia nel tempo, così, in realtà, ci stiamo domandando: qual è la rapidità con cui varia la quantità di moto della particella, $d\mathbf{p}/dt$, in quel punto e in quell'istante, misurata nel sistema «del laboratorio»? (Questo è quanto intendiamo dire, quando parliamo di forza agente su una particella in movimento). La risposta è contenuta, implicitamente, in quanto abbiamo già imparato. Osserviamo il sistema da un riferimento di coordinate O', che si muova, nell'istante in questione, *solidalmente* con la particella: nel sistema «della particella» questa sarà, almeno momentaneamente, in quiete. Adesso sono le altre cariche che si stanno muovendo e questa è una situazione che sappiamo trattare. La forza che agisce sulla carica stazionaria q è esattamente $\mathbf{E}'q$, dove $\mathbf{E}'$ è il campo elettrico che si osserva nel sistema O', e inoltre l'equazione (7) ci fornisce il metodo per calcolare $\mathbf{E}'$, quando è dato $\mathbf{E}$: quindi, se conosciamo $\mathbf{E}$, possiamo determinare la rapidità con cui varia la quantità di moto della particella nel sistema O'. Ci resta solo da trasformare *questa* grandezza dal sistema O' al sistema O. Il nostro problema è imperniato, così, sulla domanda: «Come si trasforma *la forza*, cioè *la rapidità con cui varia la quantità di moto*, passando da un sistema di riferimento inerziale ad un altro?».
Può darsi che ricordiate qual è la soluzione di questo problema, che è stato trattato nel volume 1, capitolo 12, ma, invece di prendere di sana pianta le formule dal volume 1, rivediamo qui alcuni passaggi che ci conducono fino a esse: questo ci aiuterà a capire esattamente quello che succede. Consideriamo, allora, un qualsiasi sistema inerziale O', che si muova nel verso positivo dell'asse x con velocità di modulo v, rispetto a un altro sistema O. Supponiamo che, nel sistema O', una particella, la cui massa a riposo è m, si muova nel verso positivo dell'asse x' con velocità v'. Indichiamo con p_x la componente lungo l'asse x della quantità di moto (misurata nel sistema O) e con p'_x la componente lungo l'asse x' della quantità di moto (misurata nel sistema O'). Per trovare la relazione esistente tra p_x e p'_x, si noti che:

$$p'_x = \frac{mv'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = mc\beta'\gamma' \tag{18}$$

dove abbiamo usato le note abbreviazioni: $\beta' = v'/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta'^2}$. Nel sistema di riferimento O, d'altra parte, il modulo della velocità della particella è $(v + v')\,/\,(1 + vv'/c^2)$, che possiamo scrivere $c\,(\beta + \beta')/(1 + \beta\beta')$, così che:

5
I campi generati da cariche in movimento

$$p_x = \frac{mc(\beta + \beta')}{(1 + \beta\beta')\left[1 - \left(\dfrac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{mc(\beta + \beta')}{[(1 - \beta^2)(1 - \beta'^2)]^{1/2}} =$$

$$= mc\gamma\gamma'(\beta + \beta') \tag{19}$$

Confrontando la (18) con la (19), troviamo che fra p_x e p'_x esiste la seguente relazione:

$$p_x = \gamma(p'_x + \beta\gamma' mc) \tag{20}$$

Facciamo notare che nel termine $\beta\gamma' mc$, la parte $\gamma' mc$ è $\gamma' mc^2/c$, ovvero E'/c, in cui E' (da non confondersi con il campo elettrico del quale per il momento non ci occupiamo!) è l'energia totale, cioè a riposo più cinetica, della particella nel sistema O'. Scriviamo l'equazione (20) in questo modo: $p_x = \gamma(p'_x + \beta E'/c)$ e soffermiamoci un attimo a confrontarla con la trasformazione di Lorentz della coordinata x nella stessa situazione: $x = \gamma(x' + \beta ct')$. La somiglianza tra le due espressioni ci richiama alla mente un fatto di carattere generale: in una trasformazione di Lorentz, le quattro grandezze p_x, p_y, p_z ed E/c si comportano esattamente come le quattro coordinate spazio-temporali: x, y, z, e ct. In effetti, se lo studente avesse avuto una completa padronanza di ciò, avrebbe potuto scrivere direttamente l'equazione (20), con il diritto di considerare questo sguardo retrospettivo come una perdita di tempo. Serviamoci, dunque, di questa proprietà per calcolarci le componenti trasversali della quantità di moto. Dal momento che, in una trasformazione di Lorentz in cui la velocità relativa abbia direzione e verso dell'asse x, si ha $y = y'$, ci dobbiamo aspettare che:

$$p_y = p'_y \tag{21}$$

La relazione fra t e t' è data dalla ormai familiare formula:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \tag{22}$$

Dal momento che ci interessa la relazione tra dp_x/dt e dp'_x/dt', differenziamo intanto la equazione (22) e otteniamo:

$$dt = \gamma dt' + \gamma\frac{\beta}{c}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)dt' = \gamma dt'(1 + \beta\beta') \tag{23}$$

perché dx'/dt' non è altro che v'. Dall'equazione (21) ricaviamo:

$$dp_y = dp'_y \tag{24}$$

e, dalla equazione (20):

$$dp_x = \gamma \, dp'_x + \gamma \beta mc \left(\frac{d\gamma'}{dp'_x}\right) dp'_x \tag{25}$$

Il fattore $mc(d\gamma'/dp'_x)$, che compare in quest'ultima espressione, può venire calcolato partendo dall'equazione (18), che ci fornisce:

$$p'_x = mc\gamma'\beta' = mc\sqrt{\gamma'^2 - 1} \tag{26}$$

Così:

$$\frac{dp'_x}{d\gamma'} = \frac{mc\gamma'}{\sqrt{\gamma'^2 - 1}} = \frac{mc}{\beta'} \tag{27}$$

Allora:

$$\frac{d\gamma'}{dp'_x} = \frac{1}{(dp'_x/d\gamma')} = \frac{\beta'}{mc}$$

e, sostituendo questo valore nell'equazione (25), otteniamo:

$$dp_x = \gamma \, dp'_x (1 + \beta\beta') \tag{28}$$

Dividendo membro a membro l'equazione (28) per l'equazione (23) vediamo che:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'} \tag{29}$$

e questo vale comunque sia grande v', perché il fattore $(1 + \beta\beta')$ era presente in tutte e due le equazioni. In realtà, ci interesseremo solamente a quei casi in cui v' è molto piccolo — cioè quando la particella è quasi in quiete nel sistema O' — e in questo caso si può trascurare il termine $\beta\beta'$, per cui, dal rapporto fra le equazioni (24) e (23), otteniamo, per la rapidità di variazione della quantità di moto trasversale:

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_y}{dt'} \tag{30}$$

Riassumiamo questi importanti risultati: se O' è un sistema inerziale, in cui una particella è istantaneamente in quiete oppure si muove molto lentamente e O è un altro sistema inerziale, rispetto al quale il sistema O' si muove con velocità qualsiasi, servendoci dei simboli $\parallel$ e $\perp$ per indicare le componenti della quantità di moto, rispettivamente parallela e normale alla velocità relativa di O' e O, possiamo affermare che:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp_\parallel}{dt} &= \frac{dp'_\parallel}{dt'} \\ \frac{dp_\perp}{dt} &= \frac{1}{\gamma}\frac{dp'_\perp}{dt'} \end{aligned}} \tag{31}$$

Adesso che abbiamo a disposizione la legge di trasformazione della forza (equazione (31)) e la legge di trasformazione del campo elettrico (equazione (7)), ritorniamo al caso della particella carica che si muove nel campo **E** e scopriremo un fatto sorprendentemente semplice. Consideriamo, prima di tutto, $E_\parallel$, cioè la componente di **E** parallela alla direzione istantanea del moto della particella carica. In un sistema di riferimento O', che si muova in quell'istante solidalmente con la particella, il campo elettrico longitudinale è $E'_\parallel$ e, secondo l'equazione (7), $E'_\parallel = E_\parallel$: la forza $dp'_\parallel/dt'$ è, quindi:

$$\frac{dp'_\parallel}{dt'} = E'_\parallel\, q = qE_\parallel \tag{32}$$

Ritornando al sistema O, supponiamo che in questo siano disposti degli osservatori che stanno misurando la forza longitudinale, cioè la rapidità con cui varia la componente longitudinale della quantità di moto, $dp_\parallel/dt$. Secondo l'equazione (31), $dp_\parallel/dt = dp'_\parallel/dt$, cosicché nel riferimento O la componente longitudinale della forza che essi misurano è:

$$\frac{dp_\parallel}{dt} = \frac{dp'_\parallel}{dt'} = qE_\parallel \tag{33}$$

Naturalmente, la particella non *rimane* in quiete nel sistema O' al passare del tempo: essa sarà accelerata dal campo $\mathbf{E}'$ e $\mathbf{v}'$, la velocità della particella nel sistema inerziale O', aumenterà gradualmente partendo da zero. Tuttavia, dal momento che il nostro interesse è rivolto all'accelerazione istantanea, sono implicati in ogni modo solamente valori infinitesimi di v' e la limitazione sulla validità della equazione (31) è rigorosamente soddisfatta. Per quel che riguarda $E_\perp$, cioè la componente trasversale del campo nel sistema O, la trasformazione è $E'_\perp = \gamma E_\perp$, e quindi $(dp'_\perp/dt') = qE'_\perp = q\gamma E_\perp$, ma, nel ritrasformare la forza nel sistema O, si ha: $(dp_\perp/dt) = (1/\gamma)\,(dp'_\perp/dt')$ e il coefficiente γ alla fine scompare:

$$\frac{dp_\perp}{dt} = \frac{1}{\gamma}(\gamma E_\perp\, q) = qE_\perp \tag{34}$$

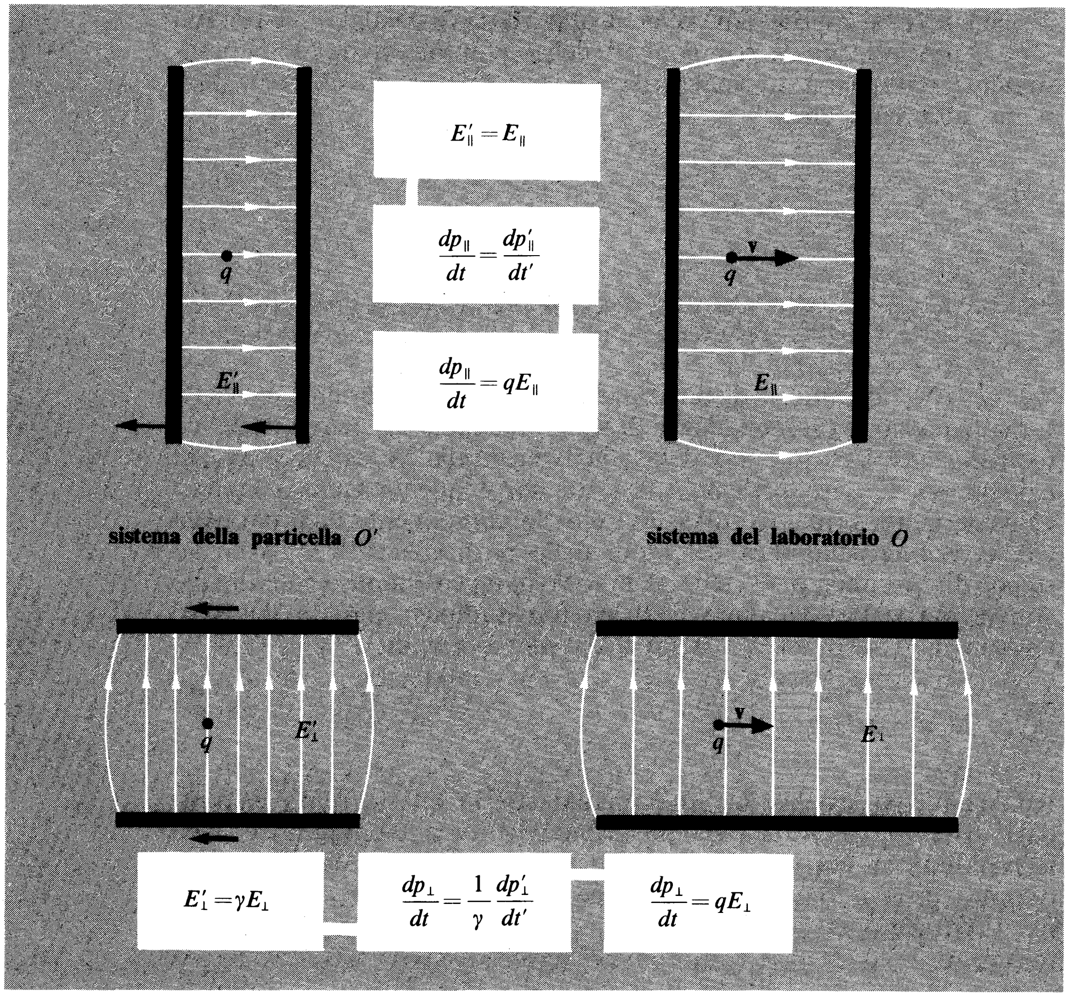

FIGURA 5.19 *In un sistema di riferimento in cui le cariche che producono il campo* **E** *sono ferme, la forza agente su una carica q che si muove a velocità qualsiasi è semplicemente q***E.**

Le equazioni (33) e (34) non dicono altro che questo: la forza che agisce su una particella carica, in movimento rispetto al sistema O, è uguale a q volte il campo elettrico E in quel sistema ed è *assolutamente indipendente* dalla velocità della particella. In figura 5.19 è dato un quadro riassuntivo di questo risultato e di come lo abbiamo ricavato.

In questo corso ci siamo già serviti di questo risultato, quando si diceva semplicemente che il contributo del campo elettrico alla forza che agisce su una carica in movimento è q**E**. A motivo di questa familiarità e semplicità, si può ritenere che sia ovvio e che noi abbiamo perso quindi tempo a dimostrarlo. Adesso potremmo considerarlo un fatto empirico: è stato verificato in un intervallo molto grande fino a velocità così vicine a quella della luce, nel caso di elettroni, che γ è 10^4. Da questo punto di vista è una legge molto importante. La discussione svolta in questo capitolo ha dimostrato che si tratta di una conseguenza diretta dell'invarianza della carica.

5.9 INTERAZIONE TRA UNA CARICA IN MOVIMENTO E ALTRE CARICHE IN MOVIMENTO

Sappiamo che su una carica in movimento può agire una forza che dipende dalla velocità. Essa è associata a un *campo magnetico*, le cui sorgenti sono le correnti elettriche, cioè altre cariche in movimento. L'esperienza di Oersted dimostrava che le correnti elettriche possono esercitare una certa influenza sui magneti, ma a quell'epoca la natura di un magnete era completamente sconosciuta. Poco dopo Ampère e altri riuscirono a districare la situazione delle interazioni reciproche tra correnti elettriche, tipo l'attrazione che si può osservare tra due fili paralleli percorsi da correnti che fluiscano nello stesso verso. Questo condusse Ampère a formulare l'ipotesi che una sostanza magnetica contenga correnti elettriche permanenti. Sotto questa luce, l'esperienza di Oersted poteva venire interpretata come effetto della interazione tra la corrente «galvanica» nel filo e le correnti microscopiche permanenti capaci di attribuire all'ago magnetico la sua speciale proprietà. Ampère diede una formulazione matematica elegante e completa della teoria dell'interazione tra correnti costanti e dell'equivalenza fra una sostanza magnetizzata e un sistema di correnti permanenti. La sua brillante supposizione circa la reale natura del magnetismo nel ferro dovette attendere un secolo, più o meno, per ottenere la conferma definitiva.
Ampère e i suoi contemporanei non erano sicuri che le manifestazioni magnetiche delle correnti elettriche potessero derivare da qualche cosa *di più* del semplice trasporto di carica. Il moto di un oggetto carico elettrostaticamente potrebbe dare luogo a effetti simili a quelli prodotti da una corrente galvanica continua? Verso la fine del XIX secolo, la teoria di Maxwell fece pensare che la risposta doveva essere *sì* e la prima prova diretta fu ottenuta da Henry Rowland: ritorneremo sulla sua esperienza alla fine del capitolo 6.
Dalla nostra attuale posizione di vantaggio possiamo riconoscere nella interazione magnetica tra correnti elettriche un inevitabile corollario della legge di Coulomb. Se sono validi i postulati della relatività, se la carica elettrica è un invariante e se vale la legge di Coulomb, allora dobbiamo necessariamente incontrare quegli effetti che comunemente chiamiamo «magnetici». Essi si manifesteranno non appena esamineremo l'interazione elettrica tra una carica in movimento e altre cariche in movimento. Un sistema molto semplice spiegherà questa situazione.
Nel sistema «del laboratorio» (fig. 5.20 (*a*)) abbiamo una processione infinita di cariche positive che si muovono verso destra con velocità v_0 e, sovrapposta a questa, una processione di cariche negative che si muovono verso sinistra con la stessa velocità, in modulo. Si suppone che