**La contrazione dello spazio.**

Supponiamo di avere due sistemi di coordinate, O e O', che hanno una velocità relativa V. Si consideri un'asta di lunghezza $\ell'$, giacente lungo l'asse x del sistema O', con un estremo nell'origine O' e l'atro estremo posto nel punto di coordinate $x'=\ell'$. Quale sarà la lunghezza di questa asta, misurata da un osservatore nel sistema di riferimento O?
L'osservatore O esegue la misurazione nell'istante in cui O e O' coincidono, cioè quando il suo cronometro segna t=0. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz inverse per lo spazio:

$$x' = \gamma x - \gamma V t$$

e sostituendo $x'=\ell'$ e t=0 otterremo:

$$\ell' = \gamma x$$

ovvero

$$x = \ell' / \gamma$$

La lunghezza $\ell$ della sbarra misurata da O è inferiore a quella $\ell'$ misurata da O'.

$$\ell = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\ \ell'$$

Si conclude perciò che l'osservatore O in moto rispetto all'asta trova una lunghezza più piccola (cioè contratta) rispetto alla lunghezza determinata dall'osservatore O' in quiete rispetto all'asta.
Vediamo un esempio. Se O' si muove a 9/10 della velocità della luce (V=0,9c), un'asta di lunghezza 1 m per O', ad O appare lunga solamente 0,436 m!
La situazione è simmetrica rispetto ai due sistemi di riferimento in moto. L'osservatore O vede una contrazione dell'asta in O', e l'osservatore O' vede anch'egli una contrazione di un'asta simile in quiete nel sistema di riferimento O.
La contrazione della lunghezza di un'asta in moto è un effetto reale, perché risultato di misure effettuate con strumenti tarati. Concludiamo quindi che lo spazio esterno ad un sistema di riferimento in moto appare compresso nel senso del moto.

**Le trasformazioni di Lorentz per le velocità.**

Se deriviamo rispetto a t le trasformazioni di Lorentz per le coordinate si possono ottenere le trasformazioni di Lorentz per le velocità:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V v'_x}{c^2}} \\[2ex] v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{V v'_x}{c^2}\right)} \\[2ex] v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma\left(1 + \dfrac{V v'_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

Facciamo ora alcune osservazioni importanti:

1. Se la velocità relativa V è piccola rispetto a c e quindi V/c tende a 0, il fattore $\gamma$ tende a 1 ed il fattore $V v'_x / c^2$ diventa tanto piccolo da essere trascurabile. Perciò, quando V<<c, le trasformazioni di Lorentz per le velocità ridiventano quelle di Galileo, cioè:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + V \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

2. Quando nel sistema di riferimento O' viene emesso un raggio di luce con velocità $v'_x = c$ e $v'_y = v'_z = 0$, la velocità di questo raggio osservata dal sistema di riferimento O è:

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \dfrac{V c}{c^2}} = \frac{c + V}{1 + \dfrac{V}{c}} = \frac{c + V}{\dfrac{c + V}{c}} = c$$

   in accordo con il secondo postulato della relatività, secondo cui la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
   Anche scegliendo, per maggiore generalità, un raggio di luce in O' con direzione qualsiasi: $v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = c^2$, si avrebbe comunque in O: $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$, come sarebbe facile, ma un po' laborioso, dimostrare.