

### Onde nei mezzi materiali e onde luminose.

Supponiamo di avere due sistemi di coordinate,  $O$  e  $O'$ , che hanno una velocità relativa  $V$ . Supponiamo inoltre che vi sia una massa d'acqua, stazionaria rispetto al sistema  $O$ . Nell'istante in cui  $O'$  oltrepassa  $O$  e le due origini coincidono (fig. 1a), nell'acqua viene lanciato un sasso e dall'origine  $O$  cominciano a propagarsi onde circolari. La figura 1b illustra la situazione poco tempo dopo. Naturalmente, l'osservatore  $O$  vede le onde propagarsi dalla sua origine. Ma che cosa vede l'osservatore  $O'$ ? Poiché l'acqua è un mezzo materiale e definisce un particolare sistema di riferimento per ogni osservatore, in moto o stazionario, l'osservatore  $O'$  vedrà anch'egli le onde propagarsi da  $O$  (non dalla sua origine  $O'$ ). Chiunque ha osservato questo fenomeno, o uno equivalente, e la ragione di questo effetto è evidente.

Ripetiamo questo esperimento usando onde luminose invece di onde sull'acqua. Una sorgente luminosa è situata in  $O$  e quando  $O'$  oltrepassa  $O$  è emesso un impulso nell'istante in cui  $O$  e  $O'$  coincidono (fig. 2a). Poiché la sorgente è in quiete nel suo sistema di riferimento, è chiaro che l'osservatore  $O$  vedrà un'onda luminosa sferica uscire da  $O$ . L'osservatore  $O'$  vede una sorgente luminosa avvicinarsi a lui con velocità  $V$  e nell'istante in cui la sorgente è in  $O'$ , viene emesso un impulso luminoso. Poiché la velocità della luce è indipendente dalla velocità della sorgente, la situazione, osservata in  $O'$ , è

esattamente uguale a quella che si osserverebbe se la sorgente fosse situata in una posizione stazionaria in  $O'$ . Cioè, l'osservatore  $O'$  vede anch'egli un'onda luminosa sferica uscire dalla sua origine  $O'$ , non da  $O$  (fig. 2b). Perciò ciascun osservatore vede esattamente la stessa cosa: un'onda luminosa sferica che si irradia uniformemente in tutte le direzioni dalla sua origine, con velocità  $c$ .

Sulle prime, questo risultato sembra sorprendente (se non bizzarro). Qual è la differenza cruciale fra le onde luminose e le onde sull'acqua, che causa una disparità così notevole nei risultati dei due esperimenti analoghi? In realtà, il motivo è abbastanza semplice. Nel caso dell'esperimento con le onde sull'acqua vi è un mezzo materiale, tangibile, (l'acqua), stazionario nel sistema di riferimento  $O$ . Le onde sull'acqua si propagano in virtù dei moti delle molecole d'acqua. Queste particelle materiali "appartengono" a  $O$  ed entrambi gli osservatori rilevano questo fatto. Ma nell'esperimento con le onde luminose non è implicato alcun mezzo materiale: le onde luminose si propagano attraverso il vuoto. Poiché non vi è materia che possa essere giudicata "appartenente" a un sistema di riferimento o all'altro, ciascun osservatore vede l'onda luminosa rispetto al proprio sistema di coordinate e perciò vede le onde luminose irradiarsi verso l'esterno con fronti d'onda sferici.

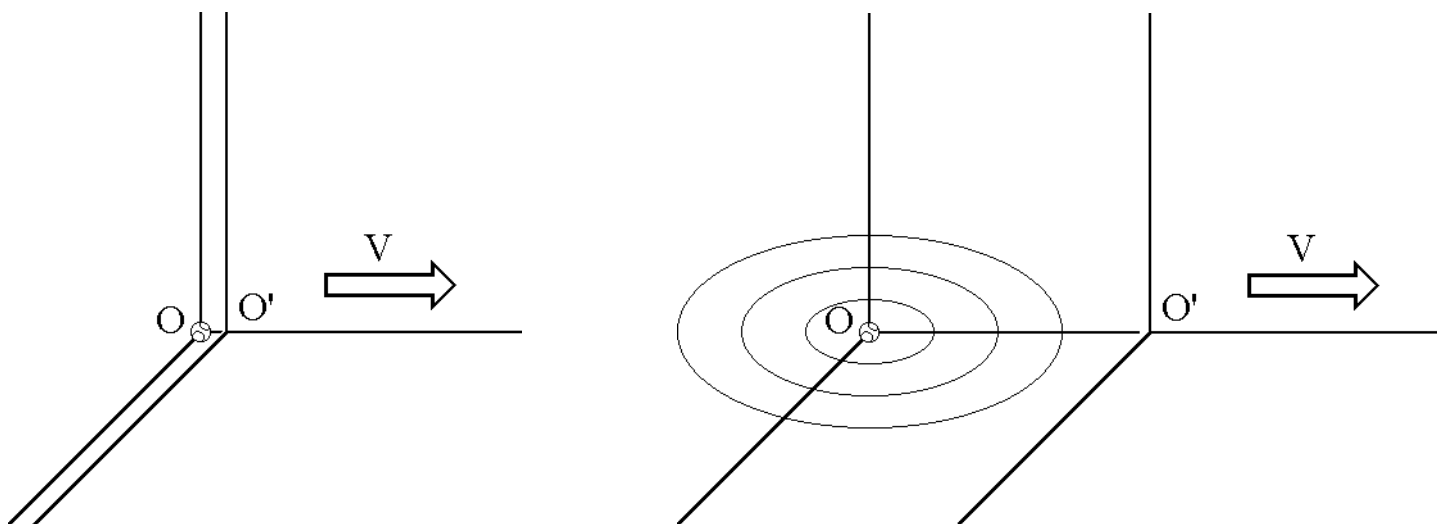


Figura 1. Entrambi gli osservatori  $O$  e  $O'$  osservano che le onde sull'acqua si propagano verso l'esterno dall'origine  $O$ .

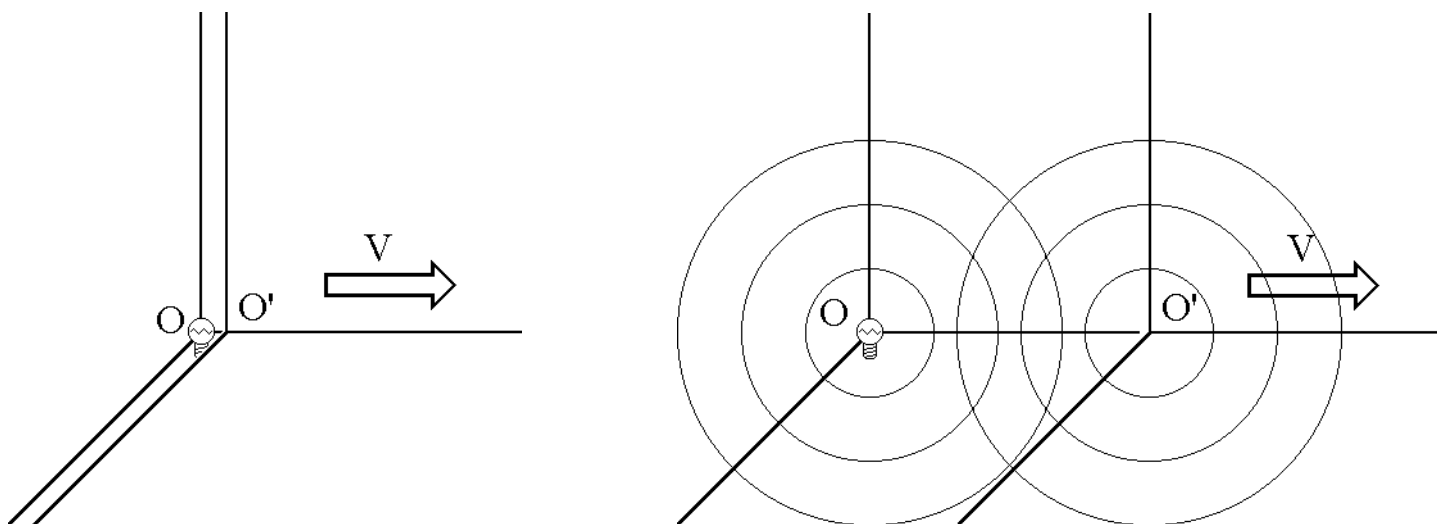


Figura 2. Un impulso luminoso è emesso dall'origine comune di  $O$  e di  $O'$  quando si oltrepassano. Ciascun osservatore vede quindi un'onda luminosa sferica che si irradia verso l'esterno dall'origine, con velocità  $c$ .

**La dilatazione del tempo.**

Supponiamo di avere due sistemi di coordinate, O e O', che hanno una velocità relativa V. Costruiamo su O' un orologio di Einstein nel modo seguente. Ad una distanza h dall'origine O' lungo l'asse z collochiamo uno specchio S. Nell'origine O' collochiamo una lampadina e un rivelatore di luce. Entrambi gli osservatori O e O' dispongono di un cronometro per misurare l'intervallo di tempo che la luce impiega per andare dalla lampadina allo specchio e ritornare al rivelatore. Nell'istante in cui O' oltrepassa O e le due origini coincidono la lampadina si accende per un brevissimo istante ed invia un lampo di luce in direzione dello specchio S; contemporaneamente i cronometri di O e O' vengono azionati. L'osservatore O' vede che l'impulso luminoso parte da O' raggiunge lo specchio S e ritorna nell'origine O' dopo aver percorso uno spazio complessivo pari a 2h (fig. 3a) in un tempo pari a:

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

L'osservatore O, invece, rileva che il lampo di luce deve viaggiare da O' a S e poi tornare in O' su un percorso inclinato che è più lungo del percorso seguito dal lampo di luce osservato da O' (fig. 3b). Tale percorso ha una lunghezza facilmente calcolabile utilizzando il teorema di Pitagora sui due triangoli rettangoli che il tragitto del raggio di luce forma con l'asse cartesiano orizzontale.

Il cateto orizzontale è pari a metà dello spazio che percorre il sistema di riferimento O' nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  che la luce impiega per andare da O' a S e tornare in O', cioè:

$$\frac{s_{O'}}{2} = \frac{V \Delta t}{2}$$

mentre il cateto verticale è pari alla distanza fra O' e lo specchio S, cioè h. L'ipotenusa sarà quindi pari a:

$$ip = \sqrt{\left(\frac{V \Delta t}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{V^2 \Delta t^2}{4} + h^2}$$

mentre lo spazio complessivamente percorso dalla luce sarà il doppio, cioè:

$$s_{luce} = 2 \sqrt{\frac{V^2 \Delta t^2}{4} + h^2} = \sqrt{V^2 \Delta t^2 + 4h^2}$$

Il tempo che O rileva sarà pari a:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{V^2 \Delta t'^2 + 4h^2}}{c}$$

L'intervallo di tempo  $\Delta t$  misurato da O è più lungo dell'intervallo di tempo  $\Delta t'$  misurato da O', poiché lo spazio che deve percorrere la luce secondo O è maggiore di quello che deve percorrere la luce secondo O'.

Perciò, l'osservatore O trova che il cronometro di O' va più adagio del proprio, poiché segna un tempo minore rispetto al suo. In altre parole O vede che il tempo nel sistema di riferimento di O' è rallentato rispetto al suo.

Vediamo di ottenere una relazione matematica che legghi fra loro  $\Delta t$  e  $\Delta t'$ . Ricavando h dall'equazione di  $\Delta t'$ :

$$h = \frac{c \Delta t'}{2}$$

e sostituendolo nell'equazione di  $\Delta t$ , otteniamo:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{V^2 \Delta t'^2 + 4 \left(\frac{c \Delta t'}{2}\right)^2}}{c} = \frac{\sqrt{V^2 \Delta t'^2 + c^2 \Delta t'^2}}{c}$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\Delta t^2 = \frac{V^2}{c^2} \Delta t'^2 + \Delta t'^2$$

ed isoliamo  $\Delta t'^2$ :

$$\Delta t'^2 = \Delta t^2 - \frac{V^2}{c^2} \Delta t^2$$

Estraendo la radice avremo la relazione che lega fra loro i tempi nei due sistemi di riferimento, cioè:

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t$$

Vediamo un esempio. Se O' si muove a 9/10 della velocità della luce ( $V=0.9c$ ), quando per O è trascorso  $\Delta t=1$  s, per O' è trascorso solamente  $\Delta t'=0.436$  s!

Naturalmente se l'osservatore O' osserva un cronometro posto in O, conclude che è il cronometro O che marcia più lentamente del suo. Perciò, si può dire che ogni osservatore troverà che un orologio in moto va più adagio di un orologio identico stazionario nel proprio sistema di riferimento. Questo risultato è valido anche per qualunque fenomeno fisico o biologico, che risulterà rallentato se osservato da un sistema di riferimento in moto relativo rispetto ad esso.

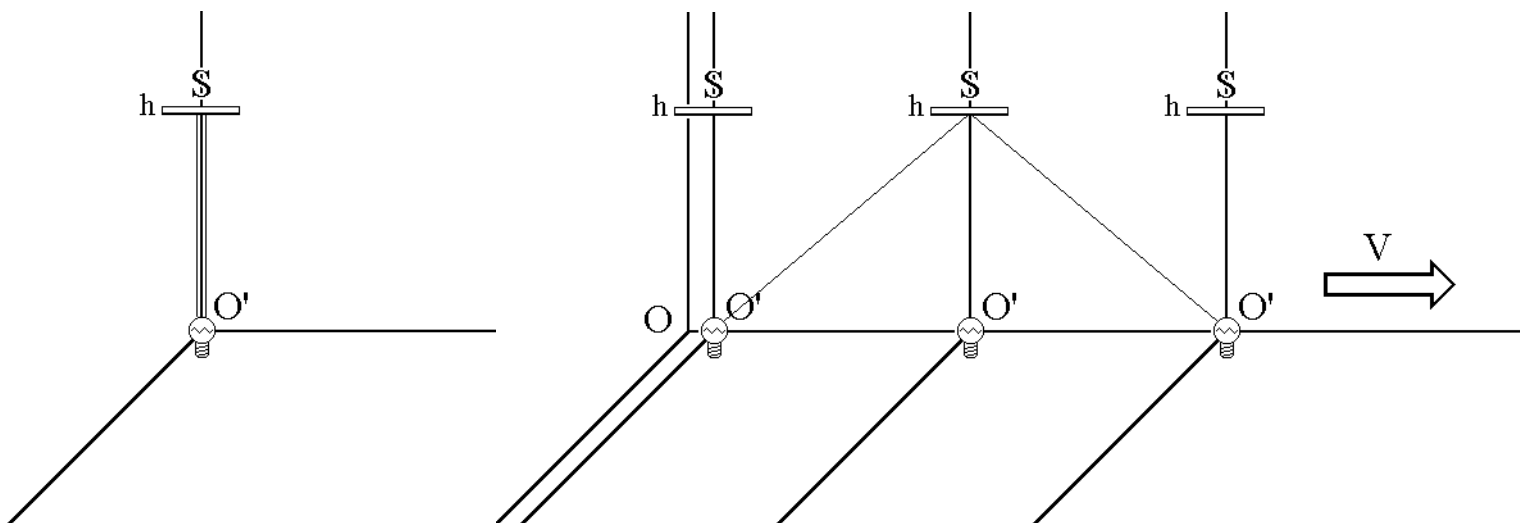


Figura 3. Secondo l'osservatore O, il segnale luminoso compie il tragitto lampadina-specchio-rivelatore in un tempo  $\Delta t$  maggiore di quello  $\Delta t'$  che misura O'. L'osservatore O conclude che il tempo in O' scorre più lentamente che in O.

### La relatività della simultaneità.

Nella nostra esperienza quotidiana ci siamo abituati a considerare che tutti gli eventi si svolgano nel tempo in modo ordinato e regolare: esiste un passato, un presente e un futuro, e possiamo sempre stabilire se un evento ha preceduto o seguito un altro evento o se i due eventi sono accaduti simultaneamente. Ma Einstein ha dimostrato che nel mondo relativistico non esiste una distinzione netta fra il passato e il futuro: eventi che sembrano avvenire in una certa successione secondo un osservatore possono sembrare avvenire in una successione affatto diversa a un osservatore in moto rispetto al primo. È forse il risultato più sorprendente della teoria di Einstein, ma è facile dimostrare che questa conclusione è una semplice e diretta conseguenza della costanza della velocità della luce.

Per dimostrare che il tempo è un concetto relativo, si consideri il seguente esempio (dovuto a Einstein). Nella figura 4a un osservatore  $O$  vede due fulmini colpire le estremità di una carrozza ferroviaria in moto, proprio quando il punto medio della carrozza lo oltrepassa. Poiché gli estremi della carrozza sono equidistanti dall'osservatore,  $O$  vede simultaneamente i lampi di luce. L'osservatore  $O'$  si trova nel punto medio della carrozza.  $O$  sa che  $O'$  si muove verso il lampo di luce emesso in  $B$  e si allontana dal lampo di luce emesso in  $A$ . Perciò,  $O$  conclude che il lampo  $B$  raggiungerà  $O'$  prima che il lampo  $A$

raggiunga  $O'$ . Ma  $O'$  è un osservatore stazionario in un sistema di riferimento inerziale (la carrozza ferroviaria) e sa che entrambi i lampi di luce viaggiano con velocità  $c$  nel suo sistema di riferimento. Poiché  $O'$  è equidistante dai due estremi della carrozza e poiché il lampo proveniente da  $B$  lo raggiunge per primo (fig. 4b), egli conclude che il lampo  $B$  dev'essere avvenuto prima del lampo  $A$ . Perciò, due eventi che sembrano simultanei nel sistema di riferimento  $O$  non sembrano tali nel sistema  $O'$ , perché i due sistemi si muovono l'uno rispetto all'altro.

Se  $O$  avesse visto il fulmine colpire  $A$  un po' prima che il fulmine colpisse  $B$ , egli avrebbe visto  $A$  precedere  $B$  mentre  $O'$  avrebbe continuato a vedere  $B$  precedere  $A$ . Quindi i due osservatori avrebbero visto gli eventi succedersi nell'ordine opposto; "passato" e "futuro" si sarebbero scambiati. Si rilevi, però, che  $O$  non può informare  $O'$  dell'evento che avverrà nel suo futuro (il lampo emesso da  $A$ , che  $O'$  vede dopo il lampo emesso da  $B$ ) perché le informazioni possono essere trasmesse con la velocità massima  $c$ . Perciò, il messaggio di  $O$  verrebbe ricevuto solo dopo che  $O'$  ha rilevato il verificarsi dell'evento.

Sebbene la successione temporale di eventi visti da differenti osservatori dipenda dalla velocità relativa di questi ultimi, la legge fisica di causa ed effetto dev'essere ancora valida nel mondo relativistico; nessun osservatore (qualunque sia il suo stato di moto) può rilevare un evento che è un effetto prima di un evento che è la causa del primo evento.

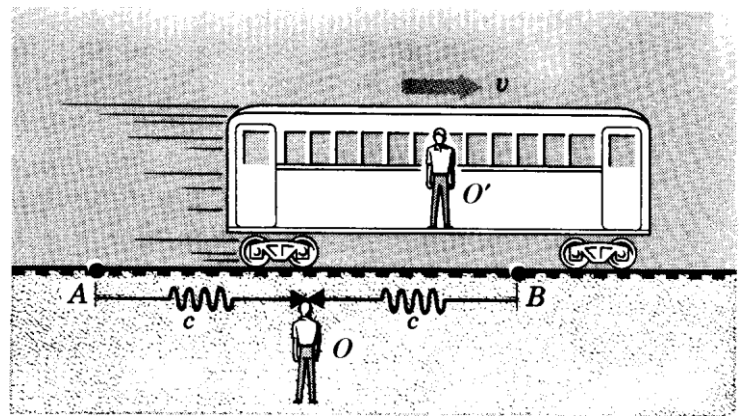
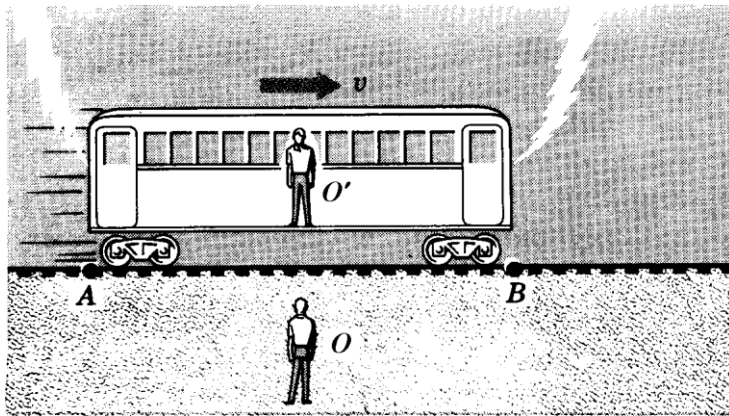


Figura 4. L'osservatore  $O$  vede due fulmini colpire gli estremi della carrozza ferroviaria simultaneamente. Ma l'osservatore  $O'$ , il quale si muove verso il fulmine di destra con velocità  $V$ , vede il fulmine di destra colpire per primo la carrozza.

### La contrazione dello spazio.

Supponiamo di avere due sistemi di coordinate,  $O$  e  $O'$ , che hanno una velocità relativa  $V$ . Si consideri un'asta di lunghezza  $\Delta l$ , giacente lungo l'asse  $x$  del sistema  $O$ , con un estremo nell'origine (fig. 5a). Quale sarà la lunghezza di questa asta, misurata da un osservatore nel sistema di riferimento  $O'$ ?

L'osservatore  $O'$  può eseguire questa misurazione determinando il tempo che la sua origine impiega per percorrere la lunghezza dell'asta. L'intervallo di tempo comincia nell'istante in cui  $O$  e  $O'$  coincidono; in questa posizione  $t = t' = 0$ . L'origine  $O'$  si muove con velocità  $V$  rispetto ad  $O$  e quando  $O'$  raggiunge l'estremo dell'asta, l'orologio di  $O'$  segna  $\Delta t'$  e l'orologio di  $O$  segna  $\Delta t$ .

L'osservatore  $O$  vede  $O'$  percorrere una distanza  $\Delta l$  con velocità  $V$ , e quindi:

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{V}$$

In base alla legge di dilatazione dei tempi, l'intervallo di tempo misurato dall'osservatore  $O'$  è:

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t$$

e la lunghezza  $\Delta l'$  che egli attribuisce alla sbarra sarà:

$$\Delta l' = V \Delta t'$$

Quindi sostituendo a  $\Delta t'$  la sua espressione in funzione di  $\Delta t$ , avremo che:

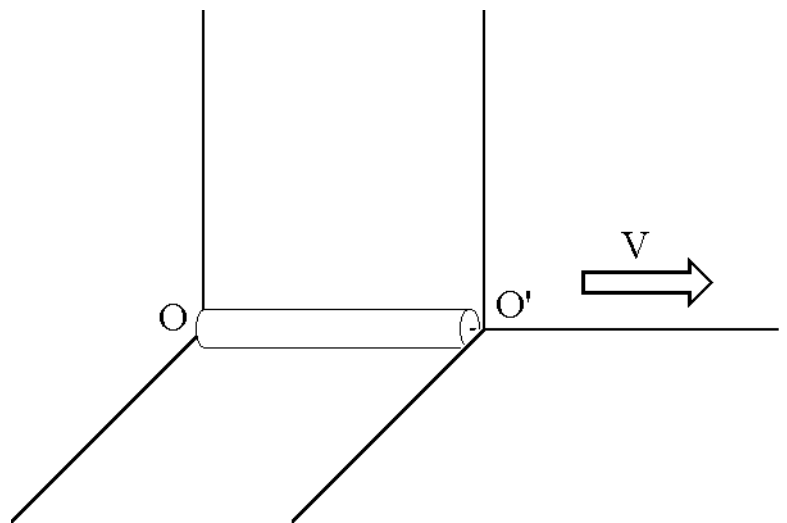
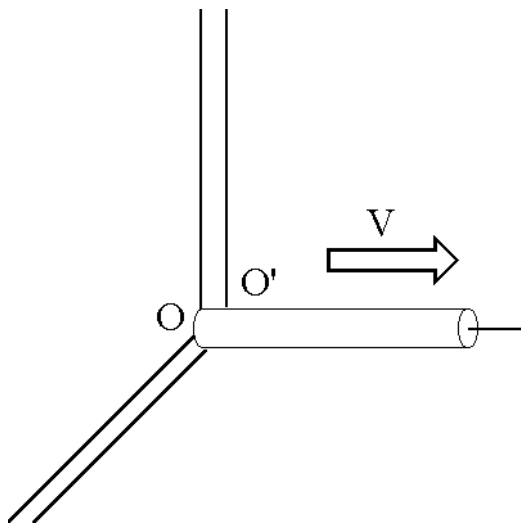


Figura 5. Secondo l'osservatore  $O$ , la lunghezza della sbarra solidale con esso è  $\Delta l$ ; mentre per l'osservatore  $O'$  la sbarra ha una lunghezza  $\Delta l'$  più piccola.

$$\Delta l' = V \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t$$

Poiché dalla prima equazione si ha:

$$\Delta l = V \Delta t$$

otteniamo:

$$\Delta l' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta l$$

La lunghezza  $\Delta l'$  della sbarra misurata da  $O'$  è inferiore a quella  $\Delta l$  misurata da  $O$ . Si conclude perciò che l'osservatore  $O'$  in moto rispetto all'asta trova una lunghezza più piccola (cioè contratta) rispetto alla lunghezza determinata dall'osservatore  $O$  in quiete rispetto all'asta.

Vediamo un esempio. Se  $O'$  si muove a  $9/10$  della velocità della luce ( $V=0.9c$ ), un'asta di lunghezza  $1$  m per  $O$ , ad  $O'$  appare lunga solamente  $0.436$  m!

La situazione è simmetrica rispetto ai due sistemi di riferimento in moto. L'osservatore  $O'$  vede una contrazione dell'asta in  $O$ , e l'osservatore  $O$  vede anch'egli una contrazione di un'asta simile in quiete nel sistema di riferimento  $O'$ .

La contrazione della lunghezza di un'asta in moto è un effetto reale, perché risultato di misure effettuate con strumenti tarati. Dobbiamo quindi concludere che lo spazio esterno ad un sistema di riferimento in moto appare compresso nel senso del moto.

**Le trasformazioni di Lorentz.**

Sulla base dei due postulati della relatività di Einstein, non è difficile sviluppare (anche se non lo faremo nei particolari qui) le equazioni che correlano le coordinate spaziali e il tempo in due sistemi di riferimento, che si muovono di moto uniforme l'uno rispetto all'altro. Queste equazioni sono analoghe alle trasformazioni galileiane:

$$\begin{cases} x = x' + V t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \text{trasf. di Galileo}$$

ma contengono differenze sostanziali quando la velocità del moto relativo è confrontabile con la velocità della luce.

Queste equazioni di trasformazione furono sviluppate per la prima volta da Hendrick Antoon Lorentz (ma sulla base di alcune ipotesi *ad hoc* che Einstein in seguito eliminò con i suoi postulati semplificatori) e perciò sono chiamate *equazioni di trasformazione di Lorentz*.

Se i due sistemi di riferimento si muovono l'uno rispetto all'altro lungo i loro rispettivi assi x, le coordinate spaziali e il tempo nei due sistemi di riferimento sono correlati dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma V t' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma t' + \gamma \frac{V x'}{c^2} \end{cases} \quad \text{trasf. di Lorentz}$$

avendo definito  $\gamma = \gamma(V)$  come:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Nell'usare queste equazioni, è sottinteso che l'osservatore O ha un metro rigido con cui misura le distanze x, y, z, e un orologio con cui misura il tempo t. L'osservatore O' è munito di strumenti analoghi per eseguire le corrispondenti misurazioni nel proprio sistema di riferimento e tara i propri strumenti confrontandoli con quelli dell'osservatore O quando i due sistemi sono in quiete l'uno rispetto all'altro. Perciò, quando i due sistemi sono in moto relativo, i due orologi possono essere azzerati simultaneamente e fatti partire nell'istante in cui le due origini coincidono.

Le equazioni precedenti significano che quando l'osservatore O determina che un certo evento è avvenuto nel punto x, y, z e nell'istante t nel sistema di riferimento O, l'osservatore O' vede lo stesso evento nel punto x', y', z' e nell'istante t' nel sistema di riferimento O'.

Si rilevi che le coordinate spaziali *trasversali* al moto relativo dei due sistemi, y e z, non sono influenzate dal moto ed hanno gli stessi valori in entrambi i sistemi.

Se la velocità relativa V è piccola rispetto a c e quindi V/c tende a 0, il fattore  $\gamma$  tende a 1 ed il fattore  $V x' / c^2$  diventa tanto piccolo da essere trascurabile. Perciò, quando  $V \ll c$ , le equazioni di Lorentz sono indistinguibili dalle equazioni di Galileo. Poiché nella nostra esperienza quotidiana incontriamo di rado velocità confrontabili con la velocità della luce, il nostro mondo è sostanzialmente newtoniano e gli effetti relativistici direttamente osservabili sono in genere assenti.

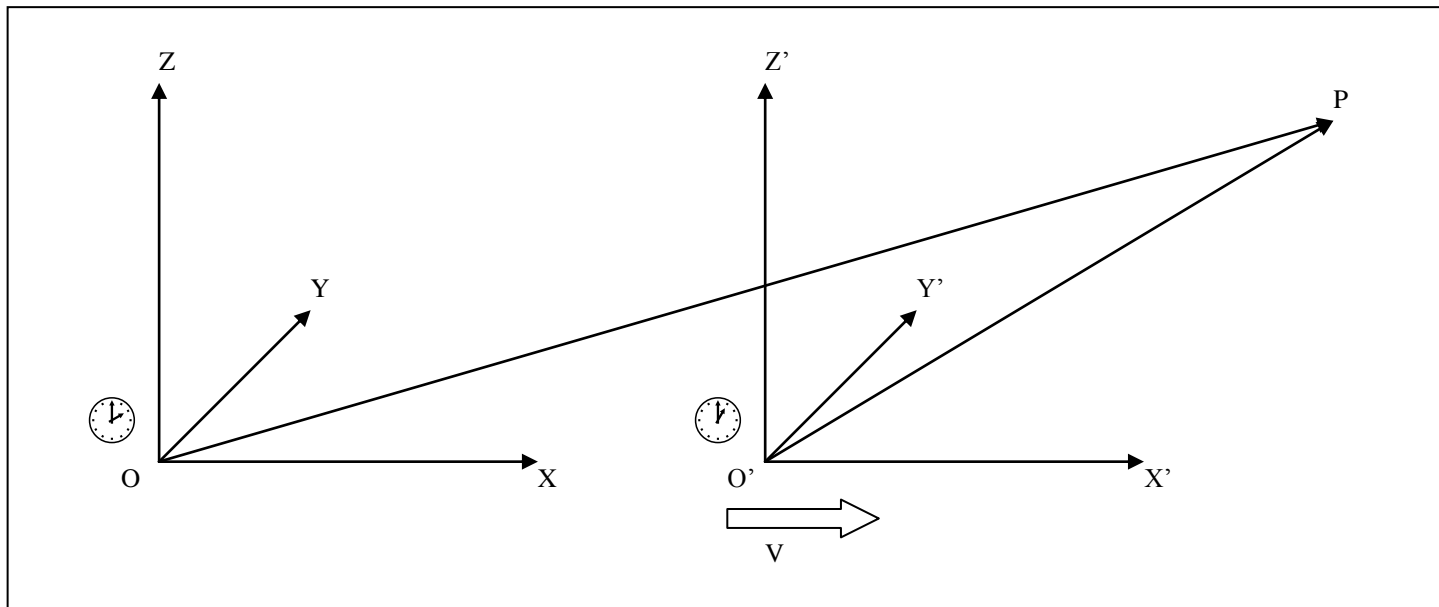


Figura 6. Quando l'osservatore O determina che un certo evento è avvenuto nel punto x, y, z e nell'istante t nel sistema di riferimento O, l'osservatore O' vede lo stesso evento nel punto x', y', z' e nell'istante t' nel sistema di riferimento O'

**Le trasformazioni di Lorentz per le velocità.**

Ci poniamo come obiettivo quello di ottenere le equazioni che legano le 3 componenti della velocità  $v_x, v_y$  e  $v_z$  di un punto P misurate nel sistema di riferimento O, con le 3 componenti della velocità  $v'_x, v'_y$  e  $v'_z$  dello stesso punto P misurate nel sistema di riferimento O'.

Per definizione le 3 componenti della velocità nel sistema di riferimento O saranno le derivate delle 3 coordinate spaziali  $x, y, z$  fatte rispetto al tempo  $t$  misurato in O, ovvero:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

mentre le 3 componenti della velocità nel sistema di riferimento O' saranno le derivate delle 3 coordinate spaziali  $x', y', z'$  fatte rispetto al tempo  $t'$  misurato in O', ovvero:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{dx'}{dt'} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} \end{cases}$$

Consideriamo le trasformazioni di Lorentz e differenziamo i due membri delle equazioni. Così facendo, otteniamo:

$$\begin{cases} dx = \gamma dx' + \gamma V dt' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \gamma dt' + \gamma \frac{V}{c^2} dx' \end{cases}$$

Dalla definizione di  $v'_x$  si ha che:

$$dx' = v'_x dt'$$

quindi, sostituendo a secondo membro delle equazioni del sistema precedente  $dx'$  con  $v'_x dt'$ , si avrà:

$$\begin{cases} dx = \gamma v'_x dt' + \gamma V dt' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \gamma dt' + \gamma \frac{V}{c^2} v'_x dt' \end{cases}$$

Raccogliamo  $\gamma dt'$  a secondo membro:

$$\begin{cases} dx = \gamma dt' (v'_x + V) \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \gamma dt' \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right) \end{cases}$$

Dividiamo ora i due membri delle prime 3 equazioni per l'ultima equazione:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dt' (v'_x + V)}{\gamma dt' \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma dt' \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

semplifichiamo  $\gamma$  e  $dt'$ , ove possibile:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma dt' \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

e otteniamo le trasformazioni di Lorentz per le velocità:

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}} \\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)} \\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

Facciamo ora alcune osservazioni importanti:

1. Se la velocità relativa  $V$  è piccola rispetto a  $c$  e quindi  $V/c$  tende a 0, il fattore  $\gamma$  tende a 1 ed il fattore  $V v'_x / c^2$  diventa tanto piccolo da essere trascurabile. Perciò, quando  $V \ll c$ , le trasformazioni di Lorentz per le velocità ridiventano quelle di Galileo, cioè:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + V \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \quad \text{trasf. di Galileo per le velocità}$$

2. Quando nel sistema di riferimento O' viene emesso un raggio di luce con velocità  $v'_x = c$  e  $v'_y = v'_z = 0$ , la velocità di questo raggio osservata dal sistema di riferimento O è:

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c}} = \frac{c + V}{\frac{c + V}{c}} = c$$

in accordo con il secondo postulato della relatività, secondo cui la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Anche scegliendo, per maggiore generalità, un raggio di luce in O' con direzione qualsiasi:  $v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = c^2$ , si avrebbe comunque in O:  $v^2_x + v^2_y + v^2_z = c^2$ , come sarebbe facile, ma un po' laborioso, dimostrare.

### L'aumento della massa.

Il primo postulato della teoria della relatività afferma che tutte le leggi fisiche devono essere le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Una di queste leggi è la conservazione della quantità di moto; useremo ora l'invariabilità di questa legge per determinare l'effetto del moto sulla massa.

Si considerino due osservatori situati in due sistemi di riferimento  $O$  e  $O'$ , in moto relativo con velocità  $V$ , come è illustrato in figura 7a. In ciascun sistema di riferimento vi è una massa stazionaria  $m_0$ . (Che le due masse sono realmente identiche può essere stabilito in anticipo confrontandole con una bilancia quando sono in quiete l'una rispetto all'altra.) Le posizioni delle masse sono tali che, quando i sistemi di riferimento passano uno accanto all'altro e le due origini coincidono, una molla viene fatta automaticamente scattare fra le due masse. A ciascuna massa è impressa così una velocità *trasversale* alla direzione della velocità di  $O$  e  $O'$ . Perciò, dopo lo scatto della molla, la situazione è quella illustrata in figura 7b. La massa in  $O$  ha una velocità trasversale  $v_y$  e una quantità di moto  $p_y$ , misurate dall'osservatore  $O$ ; lo stesso può dirsi della massa in  $O'$ , che avrà una velocità trasversale  $v'_y$  e una quantità di moto  $p'_y$ , misurate dall'osservatore  $O'$ . Ciascun osservatore usa un metro rigido e un orologio per misurare la velocità trasversale della sua massa nel suo sistema di riferimento. Ciascun osservatore ottiene un risultato numerico per la velocità della sua massa e comunica questo risultato al suo collega nell'altro sistema di riferimento. I due osservatori sono felici di rilevare che i risultati sono identici e si congratulano per avere verificato la conservazione della quantità di moto. Per controllare i risultati decidono di ripetere due volte l'esperimento: una volta  $O$  osserverà  $O'$  mentre esegue le sue misurazioni, e quindi  $O'$  osserverà  $O$  mentre esegue le sue misurazioni.

Durante la prima ripetizione dell'esperimento,  $O$  conferma che il metro rigido usato da  $O'$  è tarato correttamente (le dimensioni trasversali non sono influenzate dal moto relativo: la contrazione delle lunghezze avviene solo *lungo* la direzione del moto relativo), ma che il suo orologio *ritarda*. Quindi  $O$ , in base al *proprio* orologio, conclude che quando  $O'$  ha riferito che la sua massa ha percorso 1 metro in  $\Delta t'$  secondi, in realtà il percorso di 1 metro ha richiesto un tempo *superiore*, cioè  $\Delta t$  secondi, secondo la relazione:

$$\Delta t = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t' \Rightarrow \Delta t > \Delta t'$$

Perciò,  $O$  calcola che la velocità della massa in  $O'$  è *minore* del valore  $v'_y$  riferito da  $O'$ , secondo il fattore di dilatazione del

tempo:  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ . Se la velocità è minore e la

conservazione della quantità di moto è sempre valida, allora la massa usata da  $O'$  deve essere (così conclude  $O$ ) *maggiore* di

quella usata da  $O$ , secondo la quantità:  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ .

Naturalmente, durante la seconda ripetizione dell'esperimento,  $O'$  arriva esattamente alle stesse conclusioni riguardo alle misurazioni di  $O$ . Perciò, *entrambi* gli osservatori sono d'accordo sul fatto che la massa di un oggetto in moto è maggiore della massa di un oggetto identico in quiete. L'aumento della massa con la velocità, così come la dilatazione del tempo e la contrazione della lunghezza, è simmetrico rispetto ai due sistemi di riferimento in moto relativo.

La massa di un oggetto misurata in un sistema di riferimento in quiete rispetto all'oggetto è denotata con  $m_0$  ed è chiamata *massa a riposo*. Quindi, la massa  $m$ , misurata da un osservatore, che si muove con velocità  $V$  rispetto all'oggetto, è:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

In base a questa equazione si deve concludere che nessuna particella materiale può raggiungere o superare la velocità della luce perché, se  $V = c$ , il termine sotto radice si annulla ed  $m$  diventa infinita. Una massa infinita è un concetto privo di significato, e si è quindi costretti ad accettare la conclusione che le particelle materiali si muovono *sempre* con velocità minori della velocità della luce. E, a causa della regola per l'addizione delle velocità, la velocità di una particella materiale è minore di  $c$  in *ogni* sistema di riferimento.

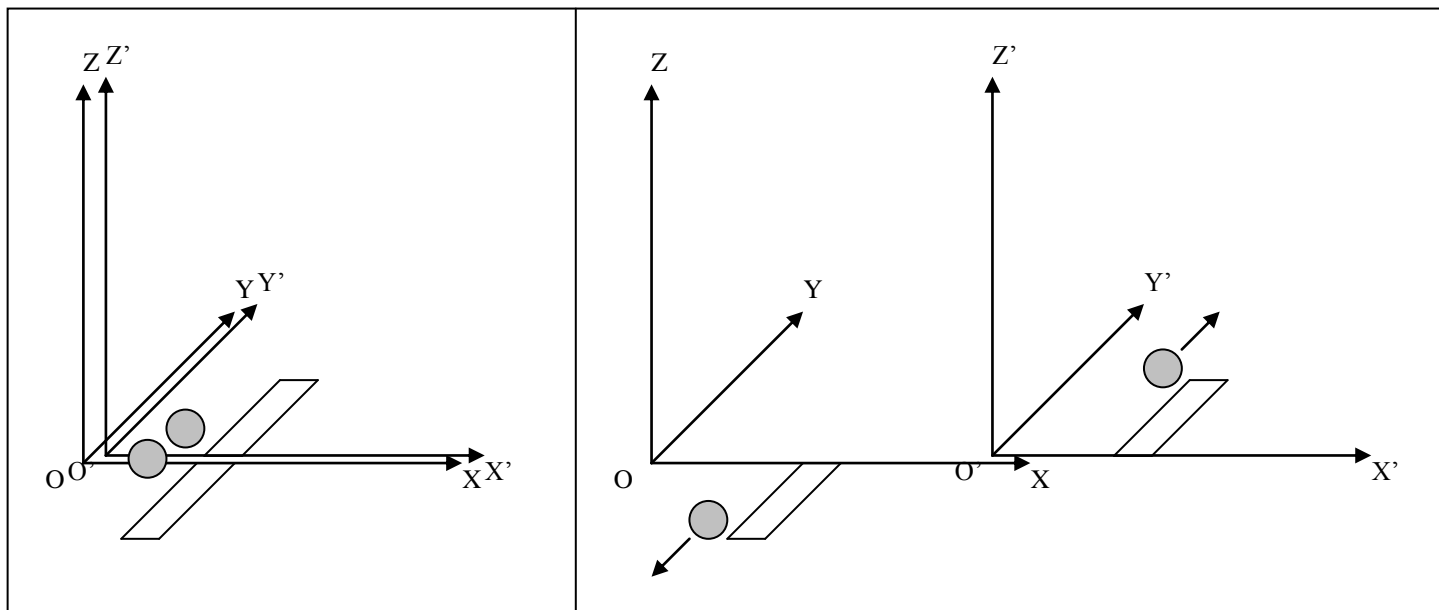


Figura 7. In ciascun sistema di riferimento vi è una massa stazionaria  $m_0$ . La molla comunica a ciascuna massa una velocità e una quantità di moto trasversali alla direzione del moto relativo.

**L'invariante  $ds^2$  e il cono di luce.**

Il secondo postulato della teoria della relatività afferma che la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Quindi se scriviamo l'equazione della traiettoria di un raggio di luce, dovrà essere sia in O che in O':

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = c dt \Rightarrow dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$$

e

$$\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} = c dt' \Rightarrow dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = 0$$

da cui:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2$$

La quantità precedente sarà perciò la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali e costituisce, quindi, un invariante relativistico. Viene usualmente indicata con la notazione  $ds^2$ , poiché rappresenta il quadrato della "distanza" nello spazio quadrimensionale (x, y, z, t) fra due punti infinitamente vicini collocati sulla traiettoria di un raggio di luce:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Utilizzando le trasformazioni di Lorentz, è possibile vedere (mediante calcoli concettualmente semplici, ma un po' laboriosi) che la quantità  $ds^2$  è un invariante non solamente per due punti collocati sulla traiettoria di un raggio di luce, ma per qualsiasi coppia di punti posti nello spazio quadrimensionale. Quindi, il quadrato della "distanza"  $ds^2$  fra due punti nello spazio quadrimensionale assume lo stesso valore da qualunque sistema di riferimento inerziale venga misurato.

Il valore di  $ds^2$  consente, quindi, di distinguere in maniera univoca la possibile connessione causale fra due eventi. Vediamo come.

Consideriamo un diagramma in cui l'asse  $ct$  sia verticale e gli assi spaziali (di cui indichiamo solo l'asse  $x$ ) siano ad esso

ortogonali. Una sorgente di luce si trovi nell'origine O e al tempo  $t = 0$ , emetta un lampo. Poiché la velocità della luce è un limite superiore per tutte le velocità, lo spazio-tempo è suddiviso in 2 regioni distinte da un "cono", detto *cono di luce*, di equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

Qualunque segnale luminoso emesso nell'origine viaggia lungo la superficie del cono, ed ha  $ds^2 = 0$ .

Ma ogni altro sistema materiale ha velocità  $v$  inferiore a  $c$  e quindi la sua traiettoria si troverà o nel cono del passato o nel cono del futuro. Punti, che possono essere raggiunti da un segnale causale, si troveranno necessariamente all'interno del cono di luce e saranno caratterizzati da un  $ds^2 < 0$ , essendo:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2 \Rightarrow ds^2 = v^2 dt^2 - c^2 dt^2 < 0$$

Si dice che eventi causali hanno una separazione di *tipo tempo*, poiché il segno di  $ds^2$  è determinato dalla quantità  $-c^2 dt^2$  che prevale su  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

I punti all'esterno del cono di luce hanno una separazione di *tipo spazio* e saranno caratterizzati da un  $ds^2 > 0$ : non sono quindi raggiungibili con dei segnali causali, poiché dovrebbero viaggiare a velocità superiori a quelle della luce. Riassumendo:

- $\left\{ \begin{array}{l} ds^2 < 0 \text{ tipo tempo - possibile connessione causale} \\ ds^2 = 0 \text{ tipo luce - possibile connessione causale} \\ ds^2 > 0 \text{ tipo spazio - non connessi causalmente} \end{array} \right.$

Essendo  $ds^2$  un invariante relativistico, non è possibile che due eventi connessi casualmente per un sistema di riferimento, non lo siano per un altro sistema di riferimento inerziale, e viceversa, non è possibile che due eventi senza connessione casuale per un sistema di riferimento, siano invece connessi casualmente per un altro sistema di riferimento inerziale. Risulta così salvo il principio di causa-effetto, fondamentale per l'intera fisica.

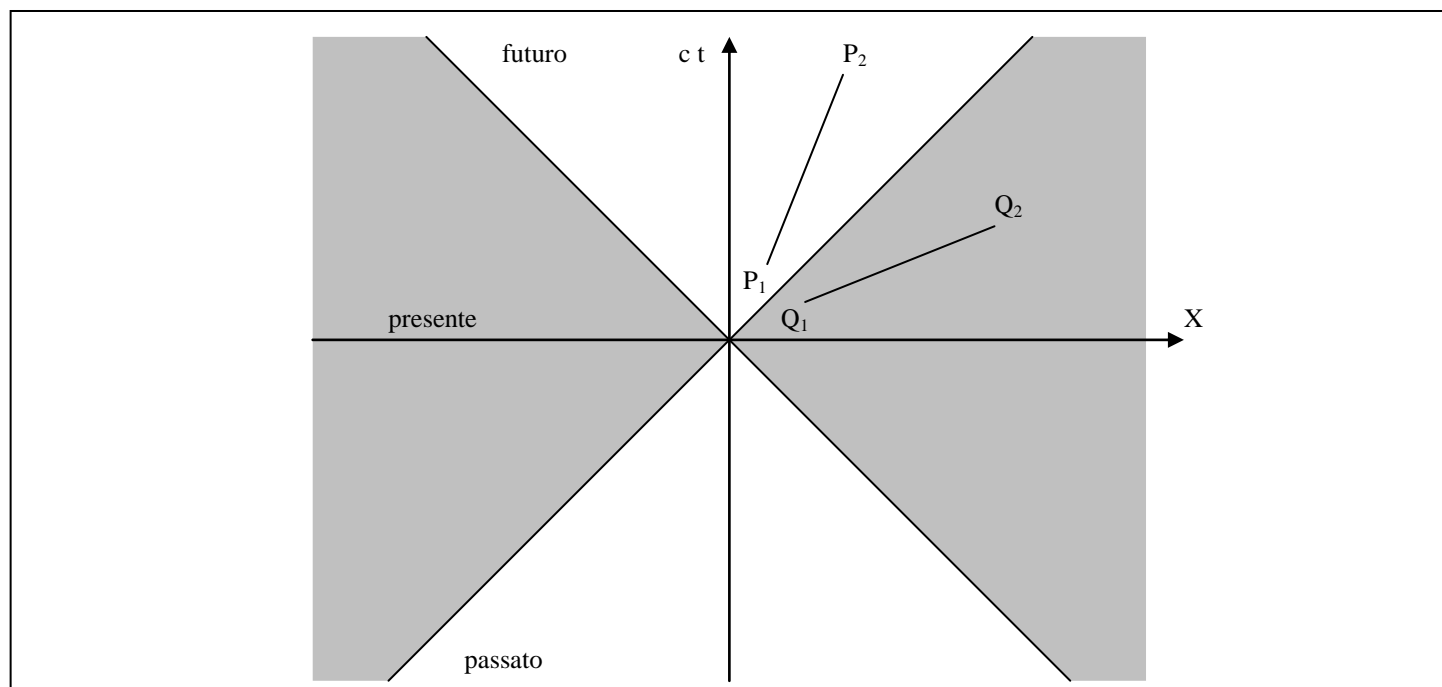


Figura 8. Cono di luce: l'evento  $P_2$  può essere causato da  $P_1$ , poiché  $P_1$  e  $P_2$  hanno una separazione di tipo tempo; l'evento  $Q_2$  non può essere causato da  $Q_1$ , poiché  $Q_1$  e  $Q_2$  hanno una separazione di tipo spazio.