# *Integrazione delle funzioni razionali fratte*

## Premessa

Un polinomio nella variabile reale x è sempre scomponibile nel prodotto di fattori di 1º e 2º grado irriducibili, cioè con discriminante negativo. Ad esempio:

$$x^3 - 1 = (x - 1)\,(x^2 + x + 1)$$
$$x^4 - 2\,x^3 + 2\,x^2 - 2\,x + 1 = (x - 1)^2\,(x^2 + 1)$$
$$x^5 - x^4 + 4\,x^3 - 4\,x^2 + 4\,x - 4 = (x - 1)\,(x^2 + 2)^2$$

Come risulta dagli esempi precedenti, sia i fattori di 1º grado che quelli di 2º grado possono ripetersi e quindi comparire con un esponente detto molteplicità del fattore. In generale sussiste quindi una formula del tipo:

$$a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n = a_0\,(x - \alpha_1)^{\ell_1}\,(x - \alpha_2)^{\ell_2} \ldots (x^2 + p_1\,x + q_1)^{m_1}\,(x^2 + p_2\,x + q_2)^{m_2} \ldots$$

dove gli esponenti interi positivi: $\ell_1$, $\ell_2$, … ed $m_1$, $m_2$, … sono tali che:

$$\ell_1 + \ell_2 + \ldots + 2\,m_1 + 2\,m_2 + \ldots = n$$

## Scomposizione in fratti semplici

Dato un rapporto fra due polinomi P(x)/Q(x) se il grado di P(x) è maggiore o uguale al grado di Q(x) si può procedere alla divisione di P(x) per Q(x). Il risultato così ottenuto sarà esprimibile nel modo seguente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove S(x) è il quoziente della divisione ed R(x) il suo resto. La funzione R(x)/Q(x) è una funzione razionale propria, ovvero con il polinomio a numeratore di grado minore del polinomio al denominatore. Ciò premesso è sempre possibile scomporre la funzione razionale propria R(x)/Q(x) nella somma di più *fratti semplici* secondo lo schema della seguente tabella:

| tipi di fattori presenti in Q(x) | somme di fratti semplici presenti nella scomposizione di R(x)/Q(x) |
|---|---|
| 1º tipo: $(x - \alpha)^{\ell}$ | $\dfrac{A_1}{x - \alpha} + \dfrac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \ldots + \dfrac{A_\ell}{(x - \alpha)^{\ell}}$ |
| 2º tipo: $(x^2 + p\,x + q)^m$ | $\dfrac{B_1\,x + C_1}{x^2 + p\,x + q} + \dfrac{B_2\,x + C_2}{(x^2 + p\,x + q)^2} + \ldots + \dfrac{B_m\,x + C_m}{(x^2 + p\,x + q)^m}$ |

Quindi la funzione razionale R(x)/Q(x) si scompone nella somma di $\ell_1 + \ell_2 + \ldots$ fratti semplici corrispondenti al 1º tipo e di $m_1 + m_2 + \ldots$ fratti semplici corrispondenti al 2º tipo. Ad esempio:

$$\frac{5\,x^4 - 8\,x^3 + 8\,x^2 - 7\,x + 4}{(x - 1)^3\,(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{(x - 1)^3} + \frac{B_1\,x + C_1}{x^2 + 1}$$

Eliminando i denominatori ed applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene un sistema lineare nelle incognite $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $C_1$ che risolto fornisce i coefficienti dei fratti semplici:

$$5\,x^4 - 8\,x^3 + 8\,x^2 - 7\,x + 4 = A_1\,(x - 1)^2\,(x^2 + 1) + A_2\,(x - 1)\,(x^2 + 1) + A_3\,(x^2 + 1) + (B_1\,x + C_1)\,(x - 1)^3$$

$$\begin{cases} 5 = A_1 + B_1 \\ 4 = A_1 - A_2 + A_3 - C_1 \\ 2 = 2\,A_3 \\ 32 = 8\,A_1 - 4\,A_2 + 2\,A_3 + 8\,B_1 - 8\,C_1 \\ 38 = 5\,A_1 + 5\,A_2 + 5\,A_3 + 2\,B_1 + C_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = 5 \\ A_2 = 3/2 \\ A_3 = 1 \\ B_1 = 0 \\ C_1 = 1/2 \end{cases}$$

L'integrale della funzione razionale viene così convertito nella somma di integrali di fratti semplici:

$$\int \frac{5\,x^4 - 8\,x^3 + 8\,x^2 - 7\,x + 4}{(x - 1)^3\,(x^2 + 1)}\,dx = \int \frac{5}{x - 1}\,dx + \int \frac{3}{2\,(x - 1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x - 1)^3}\,dx + \int \frac{1}{2\,(x^2 + 1)}\,dx$$