2.5. *Integrali di funzioni razionali.*

I. *Premessa.*

Ricordiamo che per funzione razionale si intende il rapporto di due polinomi $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Si dimostra (*) che un polinomio nella variabile *reale* x è sempre scomponibile nel prodotto di fattori di 1° grado e di 2° grado *irriducibili ossia con discriminante negativo*.

Ad esempio:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1)$$
$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^2+2)^2$$

Come risulta già dagli esempi, sia i fattori di 1° grado che quelli di 2° grado possono ripetersi e quindi comparire con un esponente detto *molteplicità* del fattore: un fattore che compaia con l'esponente $2, 3, \ldots$ verrà detto fattore *doppio, triplo*, ecc. ... .

In generale sussiste quindi una formula del tipo:

$$(2.4) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n =$$
$$= a_0 (x-\alpha_1)^{l_1} (x-\alpha_2)^{l_2} \ldots (x-\alpha_h)^{l_h} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \ldots (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}$$

dove gli esponenti (interi positivi) $l_1, \ldots, l_h, m_1, \ldots, m_k$ sono tali che:

$$(2.5) \qquad l_1 + l_2 + \ldots + l_h + 2m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_k = n$$

e dove inoltre:

$$p_i^2 - 4q_i < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Occorre però avvertire che la dimostrazione della *possibilità* di una scomposizione del tipo (2.4) *non* ha carattere *costruttivo* e quindi non fornisce alcun procedimento per la determinazione effettiva dei fattori a 2° membro.

D'altra parte siccome il metodo d'integrazione che daremo si basa sul *presupposto* che il denominatore $Q(x)$ della funzione razionale sia espresso sotto la forma (2.4), non ci resta altro che *supporre nota in partenza la scomposizione del denominatore* $Q(x)$ *in fattori di* 1° e 2° *grado* (irriducibili): quello che diremo in seguito è subordinato a tale premessa.

(*) Trattasi di conseguenza del *Teorema fondamentale dell'Algebra* di cui parleremo più avanti quanto tratteremo dei *numeri complessi* (Cap. X).

II. *Scomposizione in fratti semplici.*

Ritorniamo al rapporto di due polinomi $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ per osservare quanto segue:

a) - possiamo supporre di aver soppresso eventuali fattori (di 1° e 2° grado) comuni a numeratore e denominatore, dopo di che i due polinomi si diranno *primi fra loro;*

b) - possiamo supporre che il coefficiente della potenza più alta in $Q(x)$ valga *uno* (caso a cui ci si può sempre ridurre dividendo numeratore e denominatore per una stessa costante);

c) - possiamo limitarci a trattare il problema dell'integrazione di una funzione razionale *propria* ossia nell'ipotesi che il grado di $P(x)$ sia *inferiore* al grado di $Q(x)$: se così non fosse, effettuando la *divisione* (*) di $P(x)$ per $Q(x)$ e detti $S(x)$ il *quoziente* e $R(x)$ il *resto,* avremmo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{2.6}$$

dove $S(x)$ è un polinomio il cui grado è uguale alla differenza fra il grado di $P(x)$ e quello di $Q(x)$, mentre il grado di $R(x)$ è *inferiore* a quello di $Q(x)$. La (2.6) consente di ridurre il calcolo dell'integrale del 1° membro alla somma dell'integrale di un polinomio (per cui non vi sono problemi) e dell'integrale di una funzione razionale *propria.*

Ciò premesso *è possibile scomporre la funzione razionale propria* $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ *nella somma di più "fratti semplici" secondo lo schema della seguente tabella:*

tipi di fattori presenti in $Q(x)$	somme di *fratti semplici* presenti nella scomposizione di $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$
1° tipo: $(x-\alpha)^l$	$\dfrac{A_1}{x-\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \dfrac{A_l}{(x-\alpha)^l}$
2° tipo: $(x^2+px+q)^m$	$\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \dfrac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}$

Dunque se per $Q(x)$ vale la fattorizzazione (2.4) (attualmente con $a_0 = 1$) la funzione razionale $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ si scompone nella somma di $l_1 + l_2 + \ldots + l_h$ fratti semplici corrispondenti a fattori del 1° tipo nonchè di $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ fratti semplici corrispondenti a fattori del 2° tipo.