L'interpretazione relativistica del campo magnetico

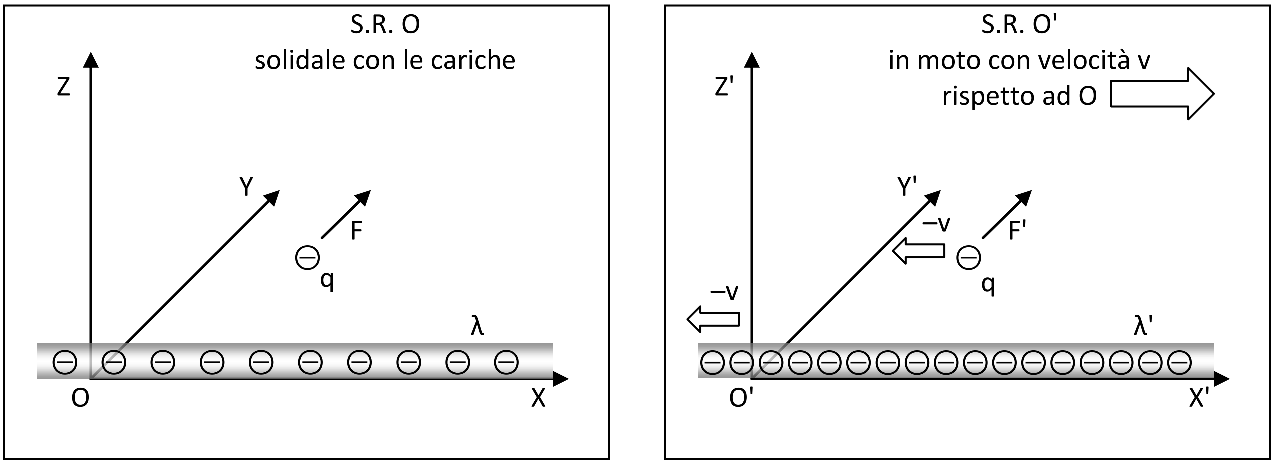
Si abbia una quantità di carica Q distribuita uniformemente su di un filo di lunghezza Δl disposto lungo l'asse X di un sistema di riferimento O solidale con il filo stesso. A distanza r da O (con r trascurabile rispetto a Δl) è posta una carica q anch'essa ferma rispetto a O e soggetta al campo elettrico statico generato dal filo carico. L'espressione matematica di tale campo è:

$$E = \frac{1}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r} \tag{1}$$

dove con $\lambda = Q/\Delta l$ si è indicata la densità lineare di carica, misurata in C/m. Quindi la forza alla quale è soggetta la carica q è:

$$F = q\,E = q\,\frac{1}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r} \tag{2}$$

Si consideri poi un secondo sistema di riferimento O' in moto rispetto ad O parallelamente all'asse X con velocità v. Un osservatore posto su O' vede un filo carico in moto con velocità –v e a distanza r da esso una carica q in moto insieme al filo con la stessa velocità –v.



Ci poniamo l'obiettivo di ricavare l'espressione matematica della forza F' alla quale è soggetta la carica q secondo il sistema di riferimento O'. A tal fine richiediamo che la variazione della quantità di moto della carica q misurata da O coincida con quella misurata da O':

$$\Delta p = \Delta p' \;\rightarrow\; F{\cdot}\Delta t = F'{\cdot}\Delta t' \tag{3}$$

da cui ricavando F' in funzione di F e sostituendo l'espressione matematica di F avremo:

$$F' = F\,\frac{\Delta t}{\Delta t'} = q\,\frac{1}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}\,\frac{\Delta t}{\Delta t'} \tag{4}$$

Il tempo Δt' misurato dal sistema di riferimento O' appare maggiore per un fattore γ rispetto al tempo Δt misurato dal sistema di riferimento O solidale con il filo carico (dilatazione dei tempi):

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;\rightarrow\; \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{5}$$

mentre la lunghezza del filo carico Δl' misurata dal sistema di riferimento O' appare minore per un fattore 1/γ rispetto alla lunghezza Δl misurata dal sistema di riferimento O (contrazione delle lunghezze):

$$\Delta l' = \frac{1}{\gamma}\,\Delta l = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\Delta l \;\rightarrow\; \frac{1}{\Delta l} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\frac{1}{\Delta l'} \tag{6}$$

Moltiplicando per Q entrambi i membri dell'equazione precedente otteniamo il legame esistente fra le due densità lineari di carica: $\lambda = Q/\Delta l$ misurata da O e $\lambda' = Q/\Delta l'$ misurata da O', cioè:

$$\frac{Q}{\Delta l} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\frac{Q}{\Delta l'} \;\rightarrow\; \lambda = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\lambda' \tag{7}$$

La densità lineare di carica λ' misurata da O' risulta maggiore di quella misurata da O per effetto della contrazione delle lunghezze nella direzione parallela all'asse X. Il raggio r, invece, essendo disposto perpendicolarmente all'asse X non subisce variazioni relativistiche, quindi: r = r'. Sostituendo le formule per Δt/Δt' e λ nella formula che dà la forza F' misurata da O' otteniamo:

$$F' = q \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{\lambda'}{r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \tag{8}$$

È possibile osservare che la forza elettrica F' misurata dal sistema di riferimento O' appare diminuita di un fattore v^2/c^2 rispetto alla semplice forza elettrostatica generata dal filo carico che è:

$$F'_{el} = q \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{\lambda'}{r} \tag{10}$$

Il secondo termine con il segno – è quella che comunemente viene chiamata interazione magnetica, ma qui è comparsa come effetto delle trasformazioni di Lorentz applicate alla legge di Coulomb dell'elettrostatica. Verifichiamo quanto appena detto:

$$F'_{magn} = q \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{\lambda'}{r} \frac{v^2}{c^2} \tag{11}$$

Poiché l'osservatore O' vede una carica Q che percorre il tratto di lunghezza Δl' nell'intervallo di tempo Δt', avremo che:

$$\lambda' = \frac{Q}{\Delta l'} = \frac{Q}{\Delta l'} \frac{\Delta t'}{\Delta t'} = \frac{Q}{\Delta t'} \frac{\Delta t'}{\Delta l'} = \frac{i'}{v} \tag{12}$$

quindi:

$$F'_{magn} = q \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{i'}{r} \frac{v}{c^2} \tag{13}$$

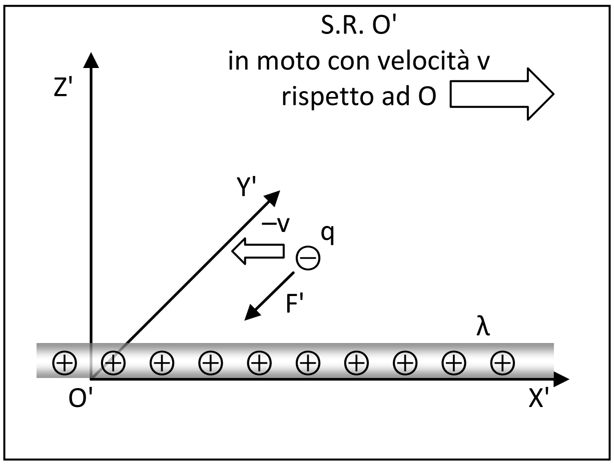
Se poi teniamo presente che:

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \tag{14}$$

otteniamo:

$$F'_{magn} = q\, v \frac{\mu_0}{2 \pi} \frac{i'}{r} = q\, v\, B \tag{13}$$

La formula precedente è la forza di Lorentz agente sulla carica q in moto con velocità v in un campo magnetico B prodotto da un filo rettilineo percorso dalla corrente i' (legge di Biot-Savart).



Una corrente elettrica è un moto di cariche negative all'interno di un filo conduttore in cui sono presenti altrettante cariche positive[1]. Aggiungiamo, quindi, al calcolo della forza su q il contributo delle cariche positive solidali con il sistema di riferimento O':

$$F'_{el} = -\, q \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \tag{14}$$

avremo che i due termini F'_{el} della (10) e F'_{el} della (14) si elidono (compatibilmente con quando affermato prima nella nota [1]) e sopravvive solamente F'_{magn}.

Concludendo possiamo affermare che per il sistema di riferimento O', che costituisce l'usuale sistema di riferimento del laboratorio in cui si studia il campo magnetico, la forza d'interazione magnetica fra cariche e correnti appare come un effetto relativistico di un campo elettrico statico.

[*GfO*]

[1] La neutralità dei fili conduttori è rigorosamente valida solo per v<<c in cui λ e λ' praticamente coincidono; nel caso di v non trascurabili rispetto a c le due densità saranno anche sensibilmente diverse fra loro e quindi il conduttore apparirà con un eccesso di carica positiva se osservato da O o con un eccesso di carica negativa se osservato da O'.