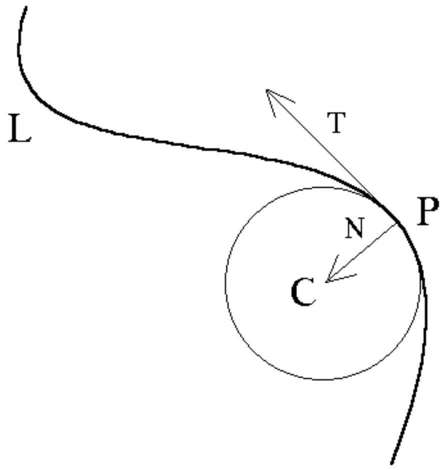
Elementi di geometria differenziale

Curve piane

Sia data una curva L nel piano e sia t un parametro scalare, che determina la posizione del punto variabile P su questa curva. Si può definire tale curva mediante un <u>raggio vettore</u> **r**(t) tracciato da un punto costante O verso il punto variabile P della curva.



$$L : t \to \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

con: $t \in I \ (I \subseteq \Re)$ ed $\mathbf{r}(t) \in \Re^2$

Derivando il raggio vettore **r** rispetto al parametro t, si ottiene il <u>vettore tangente</u> **T** alla curva L nel punto P:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j}$$

Se si prende come parametro la <u>lunghezza dell'arco di curva</u> s misurato da un punto P_0 della curva L in un determinato verso:

$$ds = dx + dy + dz = |\mathbf{T}|\ dt \qquad \Rightarrow \qquad s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{T}|\ dt$$

la derivata d**r**/ds darà allora il <u>versore tangente</u> **t** nel punto considerato P; infatti:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

La derivata del versore tangente **t** rispetto ad s si chiama <u>vettore di curvatura</u>:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

N.B. Poiché **t** è un versore, si ha che **N** è ortogonale a **t**, essendo la derivata di un versore; se infatti si ha un vettore **v** di modulo unitario:

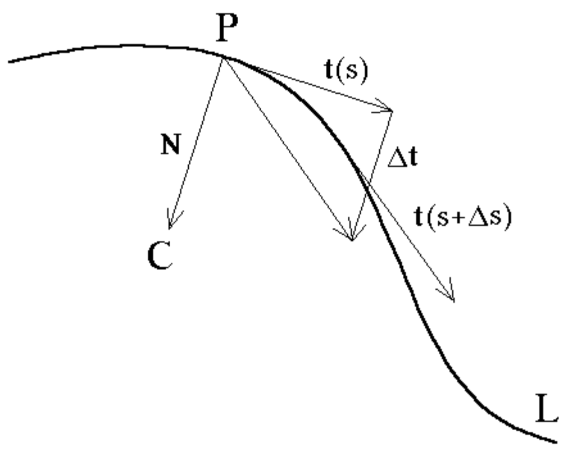
$$|\mathbf{v}| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$$

derivandolo si ha:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}=0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}=0$$

c.v.d.

Il modulo di **N** esprime la velocità di variazione del verso del vettore **t** rispetto alla lunghezza dell'arco di curva s e viene detto <u>curvatura</u> della curva L in P. Il verso di **N** è sempre diretto verso la concavità della curva, come si può dedurre graficamente. L'inverso del modulo della curvatura **N** viene detto <u>raggio di curvatura</u> della curva L nel punto P ed è quindi definito come:



$$\rho=\frac{1}{|\mathbf{N}|}$$

In virtù della definizione di ρ, il <u>versore normale</u> alla curva in P sarà esprimibile come:

$$\mathbf{n}=\rho\,\mathbf{N}$$

Da un punto di vista pratico, se la curva è parametrizzata rispetto a t, il versore normale **n** è più facilmente calcolabile nel modo seguente:

$$\mathbf{n}=\frac{d\mathbf{t}}{dt}\left|\frac{d\mathbf{t}}{dt}\right|^{-1}=\frac{d\mathbf{t}}{ds}\,\frac{ds}{dt}\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\,\frac{ds}{dt}\right|^{-1}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

Tracciando sulla retta orientata di **n** il segmento PC di lunghezza pari al raggio di curvatura ρ in P, si individua in C il <u>centro di curvatura</u> della curva L in P. La circonferenza di centro C e raggio ρ è detto <u>cerchio osculatore</u> della curva L in P.

Dalle relazioni precedenti è possibile ricavare le 2 <u>formule di Frenet</u> per una curva piana, che sono espresse dalle 2 relazioni seguenti:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\,\mathbf{n}$$ 1ª formula di Frenet

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\,\mathbf{t}$$ 2ª formula di Frenet

La 1ª formula di Frenet è di immediata dimostrazione, perché discende direttamente dalle def. di **N** e di **n**, mentre la 2ª può essere ricavata facilmente derivando rispetto ad s l'identità:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{1}{\rho} + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0$$

essendo poi **t** parallelo a d**n**/ds, si avrà che d**n**/ds è di verso opposto a **t** e di modulo $1/\rho$.

Se si utilizza l'angolo ϑ misurato a partire dall'asse X in verso antiorario è possibile scrivere il versore **t** come:

$$\mathbf{t} = \cos\vartheta\,\mathbf{i} + \sin\vartheta\,\mathbf{j}$$

ed il vettore **N** come:

$$\mathbf{N} = \frac{d\vartheta}{ds}\left(-\sin\vartheta\,\mathbf{i} + \cos\vartheta\,\mathbf{j}\right)$$

da cui:

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\vartheta}{ds}\right|$$

Quindi la curvatura della curva L in P è la derivata dell'angolo ϑ, che il versore tangente **t** forma con l'asse delle X, eseguita rispetto alla lunghezza dell'arco di curva.

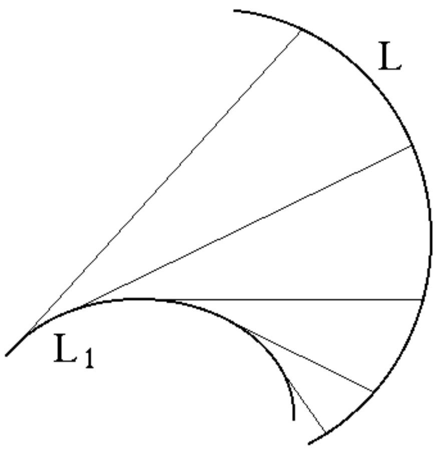
Si chiama <u>evoluta</u> di una curva L il luogo geometrico L_1 dei centri di curvatura della curva.

L'evoluta gode delle seguenti proprietà:

1) La normale alla curva L è tangente all'evoluta L_1 nel punto corrispondente.

1') L'evoluta L_1 è l'inviluppo della famiglia delle normali alla curva L.

2) L'incremento del raggio di curvatura su L è pari all'incremento della lunghezza dell'arco di evolvente L_1 corrispondente, cioè: $d\rho = ds_1$.



Si chiama <u>evolvente</u> di una curva L_1 ogni curva L che ha L_1 come evoluta.

L'evolvente gode delle seguenti proprietà:

1) Le evolventi L di L_1 incontrano ortogonalmente le tangenti all'evoluta L_1.

1') Le evolventi L di L_1 sono le traiettorie ortogonali della famiglia delle tangenti ad L_1.

2) Un punto generico P dell'evolvente L di L_1 uscente da P_0 si ottiene distendendo sulla tangente in P_1 l'arco P_0P_1.

A seguito della definizione di evolvente, la proprietà 2) dell'evoluta può riscriversi come:
2') L'incremento dell'arco di evoluta uguaglia il corrispondente incremento del raggio di curvatura di una evolvente.

La curvatura di ogni curva L è funzione della lunghezza dell'arco di curva s, cioè:

$$\frac{1}{\rho} = f(s)$$

Viceversa, è anche vero che ad ogni equazione del tipo precedente corrisponde una ben determinata curva. Se infatti si indica con ϑ l'angolo che forma la tangente alla curva con l'asse X, per il legame precedentemente visto esistente fra il raggio di curvatura ρ e l'angolo ϑ è possibile scrivere:

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \pm f(s)$$

da cui:

$$\vartheta = \pm \int_0^s f(s)\,ds + C = \pm F(s) + C$$

Tenendo conto che:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\vartheta \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\vartheta$$

si può scrivere quella che viene detta <u>equazione naturale della curva</u>:

$$x = \int_0^s \cos[F(s)]\,ds \qquad y = \pm \int_0^s \sin[F(s)]\,ds$$

Se ad esempio si ha: $\rho=R$, cioè il raggio di curvatura è costante, sarà: $f(s)=1/R$, ed $F(s)=s/R$, da cui:

$$x = R\sin(s/R) \qquad y = -R\cos(s/R)$$

che è l'equazione di una circonferenza, l'unica curva con raggio di curvatura costante.

Se ad esempio si ha: $1/\rho=2as$, cioè la curvatura è direttamente proporzionale alla lunghezza dell'arco di curva, sarà: $f(s)=2as$ ed $F(s)=as^2$, da cui:

$$x = \int_0^s \cos\left[\, a\, s^2 \,\right] ds \qquad\qquad y = \pm \int_0^s \sin\left[\, a\, s^2 \,\right] ds$$

che è l'equazione della spirale di Cornu o clotoide.

Curve sghembe

Sia data una curva L nello spazio e sia t un parametro scalare, che determina la posizione del punto variabile P su questa curva. Si può definire tale curva mediante un raggio vettore **r**(t) tracciato da un punto costante O verso il punto variabile P della curva.

$$L : t \rightarrow \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

con: $t \in I \; (I \subseteq \Re)$ ed $\mathbf{r}(t) \in \Re^3$

Derivando il raggio vettore **r** rispetto al parametro t, si ottiene il vettore tangente **T** alla curva L nel punto P:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}$$

Se si prende come parametro la lunghezza dell'arco di curva s misurato da un punto P_0 della curva L in un determinato verso, la derivata d**r**/ds darà allora il versore tangente **t** nel punto considerato P; infatti:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}}{\left|\mathbf{T}\right|} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

La derivata del versore tangente **t** rispetto ad s si chiama vettore di curvatura:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

N.B. Poiché **t** è un versore, si ha che **N** è ortogonale a **t**, essendo la derivata di un versore.

L'inverso del modulo della curvatura **N** viene detto raggio di curvatura ρ della curva L nel punto P. In virtù della definizione di ρ, il versore normale alla curva in P sarà esprimibile come:

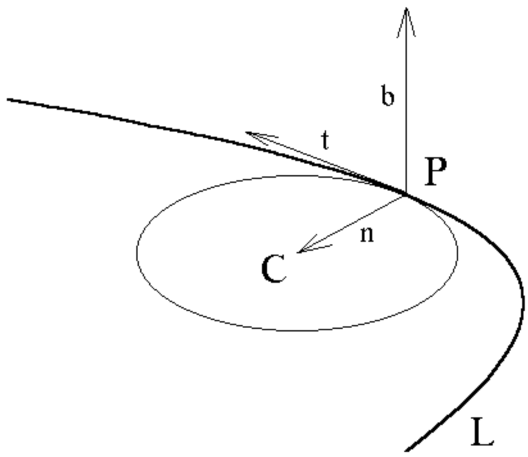
$$\mathbf{n} = \rho\,\mathbf{N} \qquad \text{essendo:} \qquad \rho = \frac{1}{\left|\mathbf{N}\right|}$$

Se si introduce ancora un versore perpendicolare a **t** e ad **n**, detto <u>versore binormale</u>, così definito:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

si ha che i tre versori: **t**, **n** e **b** costituiscono un triedro variabile legato alla curva L con orientazione identica a quella dei tre assi coordinati X, Y, Z. Il piano definito dai vettori **t** ed **n** si chiama <u>piano osculatore</u> della curva L.

Tracciando sulla retta orientata di **n** il segmento PC di lunghezza pari al raggio di curvatura ρ in P, si individua in C il <u>centro di curvatura</u> della curva L in P. La circonferenza di centro C e raggio ρ è detto <u>cerchio osculatore</u> della curva L in P. Il cerchio osculatore appartiene al piano osculatore.



Se la curva L è piana i versori **t** ed **n** giacciono nel piano della curva e **b** è costante e perpendicolare a tale piano. Per una curva non piana la derivata di **b** rispetto alla lunghezza dell'arco di curva esprime la deformazione della curva rispetto alla forma piana e si chiama <u>versore di torsione</u>.

Si può dimostrare che il vettore di torsione è parallelo alla normale principale, nel modo seguente:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{N} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

da cui consegue che d**b**/ds è perpendicolare a **t**. Essendo poi d**b**/ds perpendicolare anche a **b**, poiché derivata di un versore, sarà in definitiva parallelo ad **n** e si potrà quindi scrivere:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathbf{n}$$

dove il coefficiente numerico 1/τ è detto <u>torsione</u> della curva e l'inverso τ <u>raggio di torsione</u> della curva o <u>raggio di seconda curvatura</u>. La torsione 1/τ, a differenza della curvatura 1/ρ che è sempre positiva, può essere positiva o negativa.

Dalle relazioni precedenti è possibile ricavare le 3 <u>formule di Frenet</u> per una curva sghemba, che sono espresse dalle 3 relazioni seguenti:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n}$$ 1ª formula di Frenet

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\,\mathbf{n}$$ 2ª formula di Frenet

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{t} - \frac{1}{\tau}\,\mathbf{b}$$ 3ª formula di Frenet

La 3ª formula di Frenet può essere facilmente ottenuta derivando rispetto ad s il versore **n** ed utilizzando la 1ª e la 2ª formula di Frenet, nella maniera seguente:

$$\mathbf{n} = -\,\mathbf{t} \times \mathbf{b} \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{b} - \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{n} \times \mathbf{b} - \frac{1}{\tau}\,\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{t} - \frac{1}{\tau}\,\mathbf{b}$$

ove si è tenuto in considerazione il fatto che **t**, **n** e **b** costituiscono il triedro principale.

Se prendiamo come esempio di curva sghemba l'elica cilindrica, avremo:

$$\mathbf{r}(t) = r\cos(t)\,\mathbf{i} + r\sin(t)\,\mathbf{j} + h\,t\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{t} = \frac{-\,r\sin(t)\,\mathbf{i} + r\cos(t)\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}}{\sqrt{r^2 + h^2}} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{r^2 + h^2}\;dt$$

$$\mathbf{n} = -\cos(t)\,\mathbf{i} - \sin(t)\,\mathbf{j} \qquad s = \sqrt{r^2 + h^2}\;t$$

$$\mathbf{b} = \frac{h\sin(t)\,\mathbf{i} - h\cos(t)\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}}{\sqrt{r^2 + h^2}} \qquad \rho = r + h^2/r \qquad \tau = -\,r^2/h - h$$

Superfici nello spazio

Sia data una superficie S nello spazio e siano u e v due parametri scalari, che determinano la posizione del punto variabile P su questa superficie. Si può definire tale superficie mediante un raggio vettore **r**(u,v) tracciato da un punto costante O verso il punto variabile P di S.

$$S : (u,v) \rightarrow \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$$

con: $u \in I_u\ (I_u \subseteq \Re)$, $v \in I_v\ (I_v \subseteq \Re)$ ed $\mathbf{r}(u,v) \in \Re^3$

La posizione del punto variabile P sulla superficie S è individuata dai valori dei parametri u e v, che vengono detti parametri coordinati. Attribuendo ai parametri u e v dei valori costanti, si

ottengono due famiglie di curve sulla superficie, dette <u>curve coordinate</u> della superficie: le curve coordinate $u=C_1$ lungo le quali varia solo v, e le curve coordinate $v=C_2$ lungo le quali varia solo u. Queste due famiglie di curve costituiscono un <u>reticolo</u> sulla superficie S.
Le derivate parziali di **r** rispetto ai parametri coordinati u e v, cioè: $\mathbf{r}'_u$ ed $\mathbf{r}'_v$ saranno dei vettori orientati come le tangenti alle curve coordinate:

$$\mathbf{r}'_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} \qquad\qquad \mathbf{r}'_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$$

In conseguenza di ciò, il vettore **M** definito come il prodotto vettoriale di $\mathbf{r}'_u$ ed $\mathbf{r}'_v$ sarà orientato perpendicolarmente alla superficie S; il <u>versore normale</u> alla superficie S nel punto P sarà quindi:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\sqrt{\left(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right)^2}}$$

N.B.: invertendo l'ordine dei fattori nella def. di **M** ed **m** il verso dei due vettori cambia; la convenzione sul verso di **M** ed **m** sarà fissata in seguito, poiché di particolare importanza.
Il <u>piano tangente</u> alla superficie S nel punto P sarà definito come il piano perpendicolare ad **m**, cioè:

$$m_x\,(x - x_P) + m_y\,(y - y_P) + m_z\,(z - z_P) = 0$$

Se sulla superficie S si traccia una curva L passante per il punto P, si avrà che in generale L non è una curva coordinata e su di essa varieranno sia u che v. La direzione della tangente a questa curva sarà definita dal vettore seguente:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}'_u + \mathbf{r}'_v\,\frac{dv}{du}$$

dove si è supposto che lungo L il parametro v sia una funzione di u avente derivata.
Si consideri ora il quadrato del differenziale dell'ascissa curvilinea ds di una certa curva L tracciata sulla superficie S, cioè:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right)^2$$

Sviluppando i calcoli si ottiene la <u>1ª forma differenziale di Gauss</u>:

$$ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2\,F(u, v)\,du^2\,dv^2 + G(u, v)\,dv^2$$

dove:

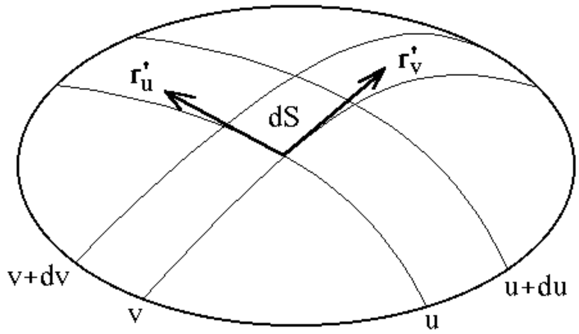
$$\begin{cases} E(u, v) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F(u, v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ G(u, v) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{cases}$$

ossia:

$$E = \mathbf{r'}_u^{\,2} \qquad F = \mathbf{r'}_u \cdot \mathbf{r'}_v \qquad G = \mathbf{r'}_v^{\,2}$$

Come si può vedere dall'ultima relazione, l'annullarsi del coefficiente F è una condizione necessaria e sufficiente affinché le curve coordinate $u=C_1$ e $v=C_2$ siano mutuamente perpendicolari; in tal caso le coordinate curvilinee u e v sulla superficie si chiamano coordinate ortogonali.

Si consideri ora una elemento di superficie dS delimitato dalle coppie di curve coordinate: u e u+du, v e v+dv, la sua area sarà calcolabile nel modo seguente:



$$dS = \left| \mathbf{r'}_u\, du \times \mathbf{r'}_v\, dv \right| = \left| \mathbf{r'}_u \times \mathbf{r'}_v \right| du\, dv$$

Elevando al quadrato il vettore $\mathbf{r'}_u \times \mathbf{r'}_v$ e sviluppando i calcoli, si avrà la relazione seguente:

$$(\mathbf{r'}_u \times \mathbf{r'}_v)^2 = E\,G - F^2 \qquad (\text{ sempre} > 0 \text{ })$$

che permette di riscrivere l'elemento di superficie dS come:

$$dS = \sqrt{E\,G - F^2}\; du\, dv$$

ed **m** come:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r'}_u \times \mathbf{r'}_v}{\sqrt{E\,G - F^2}}$$

Si consideri su S una curva L e sia **t** il suo versore tangente; **t** sarà perpendicolare al versore della normale alla superficie S, cioè: $\mathbf{t} \cdot \mathbf{m} = 0$. Differenziando questa relazione rispetto all'ascissa curvilinea s della curva L ed utilizzando le formule di Frenet, si avrà:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{ds} = 0$$

dove: ρ è il raggio di curvatura ed **n** il versore della normale principale alla curva L.
La precedente uguaglianza può anche essere riscritta come:

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{\rho} = -\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{ds} \qquad \frac{\cos\varphi}{\rho} = -\frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m}}{ds^2}$$

dove φ è l'angolo tra la normale all superficie S e la normale principale alla curva L.
Esprimendo i differenziali d**r** e d**m** in funzione dei parametri coordinati u e v, si può scrivere:

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = -\frac{(\mathbf{r}'_u\,du + \mathbf{r}'_v\,dv) \cdot (\mathbf{m}'_u\,du + \mathbf{m}'_v\,dv)}{ds^2}$$

Sviluppando le parentesi a numeratore, si ottiene la <u>2ª forma differenziale di Gauss</u>:

$$-(\mathbf{r}'_u\,du + \mathbf{r}'_v\,dv) \cdot (\mathbf{m}'_u\,du + \mathbf{m}'_v\,dv) = L(u, v)\,du^2 + 2\,M(u, v)\,du\,dv + N(u, v)\,dv^2$$

dove:

$$L = -\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_u \qquad M = -(\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v)/2 - (\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u)/2 \qquad N = -\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_v$$

Di conseguenza, facendo uso delle due formule differenziali di Gauss si potrà scrivere:

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

Se si divide la relazione precedente per du^2 si ha la seguente espressione funzione di dv/du:

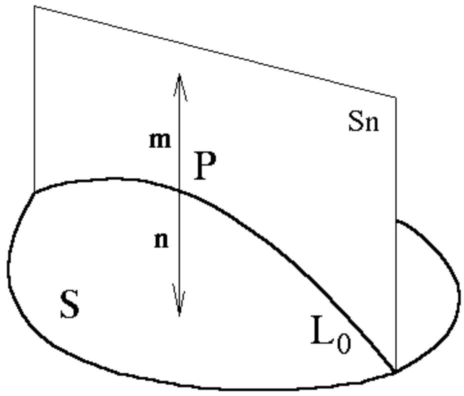
$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{L + 2\,M\,\frac{dv}{du} + N\,\frac{dv^2}{du^2}}{E + 2\,F\,\frac{dv}{du} + G\,\frac{dv^2}{du^2}}$$

Se nel punto P sulla superficie S si prendono due curve aventi la stessa orientazione sia per le tangenti che per le normali principali, tali curve avranno anche lo stesso angolo φ e pertanto, in virtù della suddetta formula, anche il valore di ρ sarà lo stesso, cioè si ha il seguente

Teorema: Due curve su una superficie aventi in un punto la stessa tangente e la stessa normale principale hanno in questo punto lo stesso raggio di curvatura.

Si consideri una curva L qualsiasi sulla superficie S e su di essa un punto P; se si traccia il piano contenente la tangente e la normale principale a L in P, l'intersezione di questo piano con S è una curva piana L_0 avente la stessa tangente e la stessa normale principale di L in P e quindi lo stesso raggio di curvatura. Il teorema precedente permette di ridurre lo studio della curvatura di ogni curva sulla superficie allo studio della curvatura delle sezioni piane della superficie.

Si chiama sezione normale della superficie S in un punto P l'intersezione della superficie con un certo piano contenente la normale alla superficie nel punto P. Esistono, quindi, una infinità di sezioni normali e si può fissare una sezione normale dando una determinata orientazione alla tangente nel piano tangente alla superficie, fissando cioè il valore del rapporto dv/du. Si osservi che la normale principale ad una sezione normale o coincide o è opposta al vettore **m**, cosicché l'angolo φ è uguale a 0 oppure a π e quindi: cos φ = ±1.



Si consideri una curva L sulla superficie S e su di essa un punto P; la sezione normale in P, che contiene la tangente ad L, sarà definita come la sezione normale corrispondente alla curva L in P. Sia ρ il raggio di curvatura di L in P e sia R il raggio di curvatura della sezione normale corrispondente. Poiché le due curve hanno la stessa tangente, i secondi membri dell'ultima espressione della formula cos φ / ρ sono per esse gli stessi, e si può quindi scrivere:

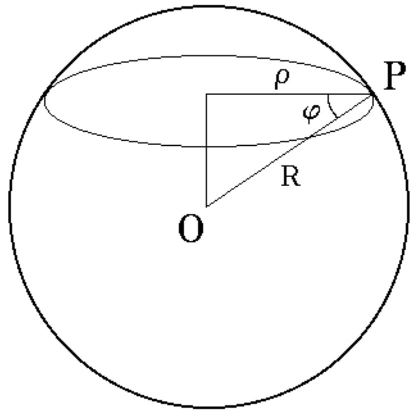
$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \pm\frac{1}{R} \qquad\qquad \rho = R\,\left|\cos\varphi\right|$$

dove φ è l'angolo tra la normale principale **n** alla curva e la normale **m** alla superficie.
Poiché R e ρ sono positivi, il segno del secondo membro deve coincidere con quello di cos φ.
L'ultima formula conduce al seguente

Teorema di Meusnier: Il raggio di curvatura di ogni curva presa su una superficie in un dato punto è pari al prodotto del raggio di curvatura della sezione normale corrispondente per il modulo del coseno dell'angolo fra la normale alla superficie in questo punto e la normale principale alla curva.

In altre parole, il raggio di curvatura di ogni curva sulla superficie è pari al valore della proiezione sulla normale alla superficie del raggio di curvatura della sezione normale corrispondente.

Nel caso di una sfera una sezione normale è costituita da una circonferenza massima, e, se si prende come curva L una circonferenza descritta sulla sfera, la formula precedente esprime la relazione evidente tra i raggi di queste due circonferenze. Come si può infatti vedere dalla figura, si ha proprio:



$$\rho = R \cdot \cos\varphi$$

In base all'ultimo teorema, lo studio della curvatura delle curve su una superficie si riduce allo studio della curvatura delle sezioni normali. Si conviene di attribuire a ρ il segno <u>negativo</u>, cioè si considera negativo il raggio di curvatura della sezione normale, quando la normale principale **n** alla sezione normale è orientata in verso opposto ad **m**. Quindi $\cos\varphi = -1$ e $\rho < 0$, si ha:

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

Poiché il denominatore della formula precedente è ds^2 sarà sempre > 0, quindi il segno di1/R sarà determinato dal segno del numeratore. Si presenteranno 3 casi distinti:

1. Se nel punto in esame si ha $M^2 - L\,N < 0$, allora 1/R ha lo stesso segno per tutte le sezioni normali, cioè le normali principali **n** a tutte le sezioni normali sono orientate nello stesso verso; il punto in esame sarà detto <u>punto ellittico</u>.

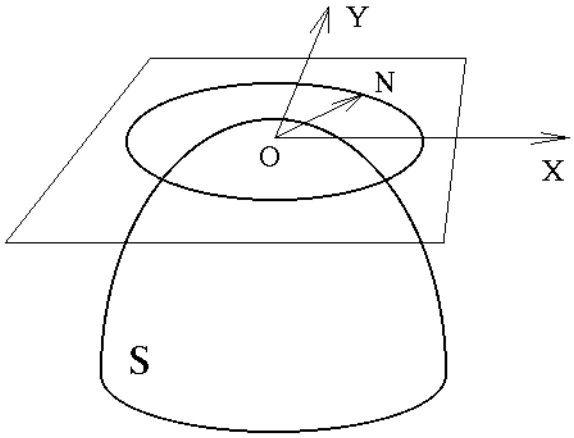
2. Se nel punto in esame si ha $M^2 - L\,N > 0$, allora 1/R ha segni diversi, cioè nel punto in esame esistono sezioni normali le cui normali principali **n** hanno versi opposti; il punto in esame sarà detto <u>punto iperbolico</u>.

3. Se nel punto in esame si ha $M^2 - L\,N = 0$, allora 1/R ha lo stesso segno per tutte le sezioni normali tranne per una in cui si annulla; il punto in esame sarà detto <u>punto parabolico</u>.

Si osservi che nel caso iperbolico il trinomio che figura al numeratore cambiando di segno si annulla: si avranno quindi due sezioni normali con curvatura nulla; nel caso parabolico ne esisterà una sola; nel caso ellittico nessuna.

Spostando l'origine O degli assi coordinati nel punto P considerato ed orientando l'asse Z come la normale **m** alla superficie S in P, si avrà che gli altri due assi X e Y giaceranno sul piano tangente in P ad S. A questo punto si costruisca sul piano XY una curva supplementare nel seguente modo: su ogni raggio vettore applicato nell'origine O si tracci il segmento ON = $\sqrt{\pm R}$, dove R è il raggio di curvatura della sezione normale alla quale il raggio vettore considerato è tangente. Si scelga il segno ± in modo tale da avere sotto la radice una grandezza positiva. Il luogo geometrico degli estremi N dei segmenti così costruiti è una curva che si chiama <u>indicatrice di Dupin</u>.

Siano (ξ,η) le coordinate del punto variabile N sull'indicatrice e θ l'angolo che forma il vettore ON rispetto all'asse X, l'equazione dell'indicatrice di Dupin sarà:



$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\pm R}\,\cos\theta \\ \eta = \sqrt{\pm R}\,\sin\theta \end{cases}$$

1. Se il punto considerato sulla superficie è <u>ellittico</u> l'indicatrice di Dupin sarà un'<u>ellisse</u> con i due semiassi in corrispondenza delle due sezioni normali in cui R assume il valore minimo e massimo.

2. Se il punto considerato sulla superficie è <u>iperbolico</u> l'indicatrice di Dupin sarà una <u>coppia di iperboli coniugate</u> con i due asintoti in corrispondenza delle due sezioni normali in cui la curvatura si annulla ed R tende all'infinito.

3. Se il punto considerato sulla superficie è <u>parabolico</u> l'indicatrice di Dupin sarà una <u>coppia di rette parallele</u> orientate nella direzione della sezione normale in cui la curvatura si annulla ed R tende all'infinito.

In tutti e tre i casi l'indicatrice di Dupin ha due assi di simmetria fra loro perpendicolari, in corrispondenza dei quali è possibile scegliere gli assi cartesiani X e Y. In tal caso se si indica con R_1 il raggio di curvatura per la sezione normale allineata con l'asse X e con R_2 il raggio di curvatura per la sezione normale allineata con l'asse Y, è possibile scrivere la cosiddetta <u>formula di Eulero</u>:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}$$

Tutte le considerazioni fatte fin'ora possono essere riassunte nel seguente

<u>Teorema</u>: In ogni punto della superficie esistono due sezioni normali mutuamente perpendicolari per cui la curvatura 1/R è massima o minima, e se $1/R_1$ ed $1/R_2$ sono i valori della curvatura corrispondenti a questi versi, la curvatura di ogni sezione normale è espressa dalla formula di Eulero in cui θ è l'angolo formato dalla tangente alla sezione normale in esame con il verso che dà la curvatura $1/R_1$.

I raggi di curvatura R_1 ed R_2 si chiamano <u>raggi di curvatura principali delle sezioni normali</u> nel punto preso in esame. I due versi nel piano tangente che li danno si chiamano <u>versi</u>

principali. Nel caso iperbolico i versi degli asintoti dell'indicatrice di Dupin sono detti versi asintotici. Nel caso ellittico R_1 ed R_2 hanno lo stesso segno, nel caso iperbolico hanno segno contrario, nel caso parabolico la curvatura di una delle due sezioni normali è nulla. Infine, si osservi che nel caso ellittico può accadere che $R_1=R_2$: in tal caso l'indicatrice di Dupin è una circonferenza ed il punto della superficie viene detto punto sferico o punto ombelicale; la sfera è l'unica superficie in cui tutti i punti sono ombelicali.
Utilizzando la relazione fondamentale che fornisce 1/R è possibile ottenere due equazioni importanti: la 1ª fornisce i versi principali, la 2ª la curvatura delle sezioni principali:

$$(E M - F L)\, du^2 + (E N - G L)\, du\, dv + (F N - G M)\, dv^2 = 0$$

$$(E G - F^2)\, 1/R^2 + (2 F M - E N - G L)\, 1/R + (L N - M^2) = 0$$

Si definisce curvatura di Gauss della superficie in un dato punto l'espressione seguente:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{L N - M^2}{E G - F^2}$$

mentre la curvatura media è definita da quest'altra relazione:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E N - 2 F M + G L}{2 (E G - F^2)}$$

Si chiama linea di curvatura su una superficie una curva la cui tangente in ogni suo punto è orientata in uno dei due versi principali: esisteranno quindi su ogni superficie due famiglie di linee di curvatura ortogonali tra loro. Cosicché l'insieme di tutte le linee di curvatura costituisce un reticolo ortogonale sulla superficie. Le equazioni delle linee di curvatura sono ottenibili integrando l'equazione differenziale in du e dv che fornisce i versi principali e sostituendo la soluzione u(v) o v(u) nell'equazione della superficie.
Teorema: condizione necessaria e sufficiente perché un reticolo coordinato sia un reticolo di linee di curvatura è che nelle due forme differenziali di Gauss i coefficienti medi siano nulli, su tutta la superficie si abbia F=M=0.
dim: Sia dato un reticolo coordinato su una superficie; tale reticolo è un reticolo di linee di curvatura se è un reticolo ortogonale, cioè F=0; inoltre, siccome le curve coordinate $u=C_1$ e $v=C_2$ sono delle linee di curvatura, l'equazione differenziale in du e dv che fornisce i versi principali deve essere soddisfatta sostituendo u o v con una costante. Tenendo conto del risultato già ottenuto: F=0, si avrà GM=0 ed EM=0; ricordando che $EG-F^2$ è sempre positivo e che pertanto E e G non possono essere nulle, si avrà anche M=0. c.v.d.

Teorema di Dupin: se nello spazio esistono tre famiglie di superfici ortogonali, due superfici qualsiasi di famiglie diverse si intersecano lungo una curva che è la linea di curvatura di queste superfici.

Si prenda, ora, come curve coordinate su una superficie le linee di curvatura di questa superficie. Se ad ogni punto P della superficie S si fa corrispondere un punto P_0 sulla sfera S_0 di raggio unitario situato all'intersezione di S_0 con il vettore **m** applicato al centro della sfera, si ottiene una corrispondenza tra i punti della superficie e quelli della sfera detta rappresentazione sferica della superficie. La posizione del punto P_0 sarà individuata dagli stessi parametri u e v che individuano la posizione del punto P. L'elemento d'area della superficie S e l'elemento corrispondente nella rappresentazione sferica S_0 sono legati tra loro dalla curvatura di Gauss:

$$dS_0 = \frac{1}{|R_1 R_2|} dS$$

Da ciò si vede che la curvatura di Gauss nel punto P è in valore assoluto il limite del rapporto tra l'area della rappresentazione sferica e l'area corrispondente della superficie di partenza quando quest'ultima si contrae indefinitamente intorno al punto P.

Bibliografia

V. I. Smirnov, Corso di matematica superiore II, Editori Riuniti, p. 417-457, 2ª ed. 1981.