Analisi del moto in campo gravitazionale con i principi di conservazione

Una massa m soggetta all’attrazione gravitazionale di un’altra massa M, con m<<M, conserva la sua energia meccanica E e il suo momento angolare L. La forza di attrazione gravitazionale:

$$\vec{F} = -G\frac{m\,M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

è una forza centrale, cioè diretta lungo il raggio uscente da M e diretto verso m. Quindi il momento della forza F esercitata da M su m è sempre nullo, poiché l’angolo fra F ed r è sempre di 180°. Il momento angolare L:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\,\vec{v} \qquad\qquad L = m\,v\,r\sin\theta \qquad \text{(in modulo)}$$

sarà quindi una costante del moto. Il moto dei pianeti avviene inoltre nel vuoto in assenza attrito, quindi anche l’energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 - G\frac{m\,M}{r}$$

è un’altra costante del moto. Se mettiamo a sistema le due equazioni precedenti nei punti di perielio (r_1) ed afelio (r_2) in cui il vettore velocità è perpendicolare al raggio e quindi $\theta = 90°$, possiamo ottenere delle importanti relazioni che collegano le velocità in perielio (v_1) e in afelio (v_2) con le caratteristiche geometriche dell’orbita ellittica. Ecco i calcoli svolti con Derive.

#1: Sistema fra i principi di conservazione dell'energia e del momento angolare nei punti di perielio ed afelio per un corpo in moto in un campo gravitazionale centrale

#2: CaseMode = Sensitive

#3: InputMode = Word

#4: r1: perielio; r2: afelio; v1: velocità perielio; v2: velocità afelio

#5: $r1\cdot v1 = r2\cdot v2$

#6: $\frac{1}{2}\cdot v1^2 - \frac{G\cdot M}{r1} = \frac{1}{2}\cdot v2^2 - \frac{G\cdot M}{r2}$

#7: $$v2 = \frac{r1\cdot v1}{r2}$$

#8: $$\frac{v1^2}{2} - \frac{G\cdot M}{r1} = \frac{r1^2\cdot v1^2}{2\cdot r2^2} - \frac{G\cdot M}{r2}$$

#9: $v1 = \sqrt{\left[\frac{2\cdot G\cdot M\cdot r2}{r1\cdot(r1 + r2)}\right]}$

#10: $$v2 = \sqrt{\left[\frac{2\cdot G\cdot M\cdot r1}{r2\cdot(r1 + r2)}\right]}$$

#11: $$r1 = a - c$$

#12: $$r2 = a + c$$

#13: $$v1 = \sqrt{\left[\frac{G\cdot M\cdot(a + c)}{a\cdot(a - c)}\right]}$$

#14: $$v2 = \sqrt{\left[\frac{G\cdot M\cdot(a - c)}{a\cdot(a + c)}\right]}$$

#15: $$e = \frac{c}{a}$$

#16: $$v1 = \sqrt{\left[\frac{G\cdot M\cdot(1 + e)}{a\cdot(1 - e)}\right]}$$

#17: $$v2 = \sqrt{\left[\frac{G\cdot M\cdot(1 - e)}{a\cdot(1 + e)}\right]}$$

#18: Risolvendo, invece, rispetto alle velocità si ottiene

#19: $$r2 = \frac{r1\cdot v1}{v2}$$

#20: $$\frac{v1^2}{2} - \frac{G\cdot M}{r1} = \frac{v2^2}{2} - \frac{G\cdot M\cdot v2}{r1\cdot v1}$$

#21: $$r1 = \frac{2\cdot G\cdot M}{v1\cdot(v1 + v2)}$$

#22: $$r2 = \frac{2\cdot G\cdot M}{v2\cdot(v1 + v2)}$$