

---

---

# SECONDA PROVA DI MATEMATICA 2023

## Testo

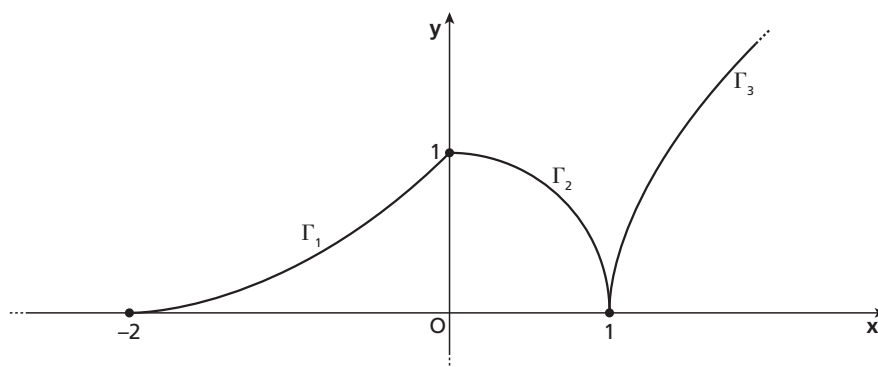
---

---

Il candidato o la candidata risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

### PROBLEMI

- 1** Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua  $y = f(x)$ , è unione dell'arco di parabola  $\Gamma_1$ , dell'arco di circonferenza  $\Gamma_2$  e dell'arco di iperbole  $\Gamma_3$ .



- a) Scrivere un'espressione analitica della funzione  $f$  definita a tratti nell'intervallo  $[-2; 2]$ , utilizzando le equazioni:

$$y = a(x + 2)^2, \quad x^2 + y^2 + b = 0, \quad x^2 - y^2 + c = 0,$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali  $a, b, c$ .

Studiare la derivabilità della funzione  $f$  e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

- b) A partire dal grafico della funzione  $f$ , dedurre quello della sua derivata  $f'$  e individuare gli intervalli di concavità e convessità di  $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ .
- c) Si consideri la funzione  $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$ , definita nell'intervallo  $[-2; 0]$ , di cui  $\Gamma_1$  è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa  $h$ . Studiare la derivabilità di  $h$  e tracciarne il grafico.
- d) Sia  $S$  la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico  $\Gamma_1$  e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale  $k$  affinché la retta di equazione  $x = k$  divida  $S$  in due regioni equivalenti.

- 2** Fissato un parametro reale  $a$ , con  $a \neq 0$ , si consideri la funzione  $f_a$  così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con  $\Omega_a$ .

- a) Al variare del parametro  $a$ , determinare il dominio di  $f_a$ , studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.
- b) Mostrare che, per  $a \neq 1$ , tutti i grafici  $\Omega_a$  intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.
- c) Al variare di  $a < 1$ , individuare gli intervalli di monotonia della funzione  $f_a$ . Studiare la funzione  $f_{-1}(x)$  e tracciarne il grafico  $\Omega_{-1}$ .
- d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico  $\Omega_{-1}$ , la retta ad esso tangente nell'origine e la retta  $x = \sqrt{3}$ .

## QUESITI

- 1** Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ . Sia  $O$  il centro del quadrato  $BCDE$  costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice  $A$ .  
Dimostrare che  $O$  è equidistante dalle rette  $AB$  e  $AC$ .
- 2** Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
- un numero primo;
  - un numero almeno pari a 3;
  - un numero al più pari a 3.

- 3** Considerata la retta  $r$  passante per i due punti  $A(1; -2; 0)$  e  $B(2; 3; -1)$ , determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro  $C(1; -6; 7)$  e tangente a  $r$ .
- 4** Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume  $V$ , stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.
- 5** Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione  $y = \sqrt{25 - x^2}$  nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.
- 6** Determinare i valori dei parametri reali  $a$  e  $b$  affinché:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

- 7** Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali  $a, b$  la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di  $\mathbb{R}$  in cui la funzione  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

- 8** Data la funzione  $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$ , definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro  $a > 0$  la funzione possiede tre zeri reali distinti.