

# M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.*

## PROBLEMA 1

Sia  $f$  la funzione definita da:  $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico  $G$  di  $f$ .
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta  $y = c$  che interseca  $G$  in due punti distinti e le regioni finite di piano  $R$  e  $S$  che essa delimita con  $G$ . Precisamente:  $R$  delimitata dall'asse  $y$ , da  $G$  e dalla retta  $y = c$  e  $S$  delimitata da  $G$  e dalla retta  $y = c$ .
3. Determinate  $c$  in modo che  $R$  e  $S$  siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di  $G$  con la retta  $y = c$ ;
4. determinate la funzione  $g$  il cui grafico è simmetrico di  $G$  rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$

## PROBLEMA 2

$ABC$  è un triangolo rettangolo di ipotenusa  $BC$ .

1. Dimostrate che la mediana relativa a  $BC$  è congruente alla metà di  $BC$ .
2. Esprimete le misure dei cateti di  $ABC$  in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con  $BC = \sqrt{3}$  metri, determinate il cono  $K$  di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di  $K$ .
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono  $K$ .

## QUESTIONARIO

1. Trovate due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.
2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Date un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1, 3)$  e un minimo relativo in  $(-1, 2)$ .
4. Dimostrate che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione reale.

## M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

5. Di una funzione  $g(x)$ , non costante, si sa che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$

Trovate una espressione di  $g(x)$ .

6. Verificate che le due funzioni  $f(x) = 3 \log x$  e  $g(x) = \log(2x)^3$  hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente  $a$ ,  $b$  e  $\delta$ . Quale è il valore di  $\delta$  che massimizza l'area del triangolo?
8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
9. Calcolate:

$$\int_0^1 \arcsen x dx$$

10. Considerate gli insiemi  $A = \{1,2,3,4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

---

Durata massima della prova: 6 ore

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

# Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.*

## PROBLEMA 1

Sia  $\gamma$  la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove  $k$  e  $\lambda$  sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni  $\gamma$ ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse  $x$  e i vertici del lato opposto su  $\gamma$ ;
3. sapendo che  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  e assumendo  $\lambda = \frac{1}{2}$ , si trovi il valore da attribuire a  $k$  affinché l'area compresa tra  $\gamma$  e l'asse  $x$  sia 1;
4. per i valori di  $k$  e  $\lambda$  sopra attribuiti,  $\gamma$  è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss*, 1777-1855). Una *media*  $\mu \neq 0$  e uno *scarto quadratico medio*  $\sigma \neq 1$  come modificano l'equazione e il grafico?

## PROBLEMA 2

Sia  $f$  la funzione così definita:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{2b} x + x$$

con  $a$  e  $b$  numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti  $a$  e  $b$ , esiste sempre un valore di  $x$  tale che  $f(x) = \frac{a+b}{2}$
2. Si consideri la funzione  $g$  ottenuta dalla  $f$  ponendo  $a = 2b = 2$ . Si studi  $g$  e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per  $x > 0$  il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

# Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

## QUESTIONARIO

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
4. Dati gli insiemi  $A = \{1,2,3,4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$  quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?
5. Dare un esempio di funzione  $g$ , non costante, tale che:  
$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$
6. Dare un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1, 3)$  e un minimo relativo in  $(-1, 2)$ .
7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
8. Si trovino due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.
9. Si dimostri che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
10. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x\sqrt{3} - y \\ y &\rightarrow x + y\sqrt{3}\end{aligned}$$

Di quale trasformazione si tratta?

---

Durata massima della prova: 6 ore

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.