

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x) \, dx = -5 \quad [1]$$

a. Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) \, dx, \quad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) \, dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^4 f\left(\frac{x}{2}\right) \, dx, \quad \int_0^1 f(2x) \, dx,$$

dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

- b. Posto: $f(x) = ax^2 + bx + c$, dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1].
- c. Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.
- d. Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata -4 .
- e. Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

2. Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a.

- a. Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.
- b. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $\frac{2}{\sqrt{13}}$. Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.
- c. Condotto il piano a parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che a sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.
- d. Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui $x = \frac{a}{2}$.

3. Il candidato dimostri i seguenti enunciati:

- a. Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
- b. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.