Esercizi su matrici e sistemi lineari

- Rango di una matrice, calcolo del rango con il metodo di riduzione, riduzione per righe, metodo di Gauss per la riduzione, riduzione di una matrice a forma triangolare alta.

1) Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&3&6&3\\3&0&3&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-2&0\\2&3&4&6\end{pmatrix},\ \mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\ \mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&4&-6\\2&5&-6\\3&1&4\\5&3&4\end{pmatrix}$$

2) Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro reale k:

$$A=\begin{pmatrix}k&2&2k&0\\2&1&k-1&k\\3k&3&2&k\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&k\\1&k&2k\\1&2&k\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}k&2&3\\2&k&2\\k&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\k&0&2\\-1&k&1\end{pmatrix}$$

3) Ridurre la matrice A a forma triangolare alta:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\1&1&-1&0\\2&1&0&1\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

- Sistemi lineari e Teorema di Rouché-Capelli. Sistemi lineari omogenei. Equazioni Matriciali. Matrici invertibili. Studio di sistemi parametrici. Determinanti e loro proprietà. Matrici: prodotto righe per colonne, trasposta di una matrice.

1) Risolvere i seguenti sistemi lineari, usando il teorema di Rouchè-Capelli:

   - $\begin{cases}2x-5y=7\\-y-2z=3\\-4y-z=5\end{cases}$

($\exists!$ soluzione, S= $\{(1,-1,-1)\}$)

   - $\begin{cases}x-3y=1\\y-6z=1/2\\x-2y-6z=5\end{cases}$

     (Sistema impossibile)

   - $\begin{cases}x+2y-3z+2t=2\\2x+5y-8z+6t=5\\3x+4y-5z+2t=4\end{cases}$

     $\begin{pmatrix}\exists\infty^2 \textit{soluzioni}\\ S=\{(2t-z,-2t+2z+1,z,t),z,t\in R\}\end{pmatrix}$

- $$\begin{cases} -6x-12y=18 \\ 3y-9z=21 \\ -2x-3y-3z=13 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \exists\infty^1 soluzioni \\ S=\{(-17-6z,7+3z,z),z\in R\} \end{pmatrix}$$

2) Si dica per quali valori del parametro reale λ è risolubile il sistema:

$$\begin{cases} x+2y+2w+z=1 \\ y+2w+z=0 \\ x+y+\lambda w=0 \\ \lambda y+2\lambda w+\lambda^2 z=0 \end{cases}$$

Si risolva il sistema nel caso in cui le soluzioni sono infinite.

3) Si consideri il sistema lineare con $\lambda\in R$ parametro:

$$\begin{cases} x+(\lambda-6)y+z=1 \\ 2y-z=\lambda \\ x+\lambda^2 y-2z=\lambda+1 \end{cases}$$

Discutere e risolvere il sistema al variare del parametro λ.

4) Si risolvano le seguenti equazioni matriciali:

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Stabilire se la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile. In caso di risposta affermativa, determinare l'inversa di *M*.

6) Si risolva il sistema lineare omogeneo AX=0 con $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

7) Risolvere l'equazione XA=B, con $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.