11. Due giocatori tirano contemporaneamente a un bersaglio, con probabilità di colpire, rispettivamente, $p_1 = 0,8$ e $p_2 = 0,6$. Determinare la variabile aleatoria X: «*numeri dei colpi messi a segno*».

$\bar{p}_1 = 0,1 \quad \bar{p}_2 = 0,4$

$[P(0) = 0,08;\ P(1) = 0,44;\ P(2) = 0,48]$

12. Un'urna contiene 7 gettoni rossi e 3 verdi. Una seconda urna contiene 6 gettoni rossi e 3 verdi. Si estrae un gettone dalla prima urna e lo si pone nella seconda; poi si estrae un gettone dalla seconda urna. Determinare la variabile aleatoria X: «*numero dei gettoni rossi estratti*».

$$\left[P(0) = \frac{3}{25};\ P(1) = \frac{39}{100};\ P(2) = \frac{49}{100}\right]$$

13. Tre giocatori tirano contemporaneamente a un bersaglio, con probabilità di colpire, rispettivamente, $p_1 = \frac{4}{5}$, $p_2 = \frac{5}{6}$, $p_3 = \frac{2}{3}$. Determinare la variabile aleatoria X: «*numero dei colpi messi a segno*».

$$\left[P(0) = \frac{1}{90};\ P(1) = \frac{11}{90};\ P(2) = \frac{38}{90};\ P(3) = \frac{40}{90}\right]$$

14. Si supponga di lanciare tre dadi regolari e sia X la variabile casuale che denota la somma dei punti usciti. Determinare la legge di probabilità e costruirne il grafico.

15. Una moneta è lanciata tre volte e sia X la variabile casuale che dà il numero delle «*teste*» che si verificano nei lanci. Determinare la tabella della distribuzione di probabilità X e costruirne il grafico.

16. Un'urna contiene 5 palline nere e 3 rosse; se si estraggono a caso, senza ripetizione, due palline ed X fornisce il numero delle palline nere estratte, determinare la distribuzione di probabilità di X e disegnarne il grafico.

17. Sia la X la variabile casuale che fornisce la differenza fra il numero di croci e quello di teste in due lanci di una moneta non truccata. Determinare la distribuzione di probabilità di X.

18. Si danno le probabilità dei valori che può assumere una variabile aleatoria X:

10 con la probabilità 0,3; 2 con la probabilità 0,4; 8 con la probabilità 0,1; 4 con probabilità 0,2.

Formare la tabella di probabilità e il poligono di distribuzione.

19. Un'urna contiene tre gettoni numerati: 1, 2, 3. Si fanno due estrazioni successive di un gettone, con reinserimento. Determinare le variabili aleatorie X: «*minimo dei due numeri estratti*» e Y «*massimo dei due numeri estratti*».

$$\left[X = \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{cases};\ Y = \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{cases}\right]$$

20. Determinare il valore medio m, la varianza σ^2 e lo scarto quadratico medio σ di ciascuna delle seguenti tabelle di probabilità.

a)

x_i	2	3	11
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

;

b)

x_i	−5	−4	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

;

c)

x_i	1	3	4	5
p_i	0,4	0,1	0,2	0,3

.

[a) $m = 4$; $\sigma^2 = 10$; $\sigma = 3,2$.
b) $m = -1$; $\sigma^2 = 8,25$; $\sigma = 2,9$.
c) $m = 3$; $\sigma^2 = 3$; $\sigma = 1,7$]

21. Determinare il valore medio m, la varianza σ^2 e lo scarto quadratico medio σ delle seguenti tabelle di probabilità:

a)

x_i	2	3	8
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

;

b)

x_i	-2	-1	7
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

;

c)

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2

;

d)

x_i	a	b
p_i	p	q

$(p+q=1)$.

[a) $m=4$; $\sigma^2=5,5$; $\sigma=2,3$; b) $m=0$; $\sigma^2=10$; $\sigma=3,2$;
c) $m=1$; $\sigma^2=2,4$; $\sigma=1,5$; d) $m=ap+bq$; $\sigma^2=pq(a-b)^2$; $\sigma=|a-b|\sqrt{pq}$]

22. Due giocatori giocano a carte. Il primo con la posta di 400 lire può vincere 1.000 lire. Quali sono le probabilità di vincita per ciascuno dei due giocatori perché il gioco sia equo? $\left[\frac{2}{7};\ \frac{5}{7}\right]$

23. Un giocatore paga 8.000 lire se esce un prefissato numero da un'estrazione a caso dei 90 numeri di una tombola, mentre riscuote 1.000 lire in caso contrario. Provare che il gioco non è equo e dire quale deve essere la posta del primo giocatore perché il gioco risulti equo. [89.000]

24. Un giocatore se estrae dal mazzo di 40 carte una carta da lui prestabilita vince 50.000 lire. Se il gioco è equo quanto deve pagare al banco per l'estrazione della carta? [1.282 lire]

25. Un giocatore lanciando due dadi e pagando una posta di L 900, vince se si presentano facce eguali. Determinare la somma che il giocatore dovrà vincere perché il gioco sia equo. [L 4.500]

26. Un'urna contiene 35 palline, di cui 15 rosse e le rimanenti gialle. Un giocatore vince se, estraendo 3 palline contemporaneamente dall'urna, se ne presentano almeno 2 rosse. Se la sua posta è di L 20.000, calcolare la sua vincita in modo che il gioco sia equo. Nel caso poi che le palline estratte venissero rimesse nell'urna, dire se la posta calcolata per l'avversario è sufficiente ed in caso contrario dire quale dovrà essere il suo importo. [31.233; No; 30.814]

27. Si hanno due urne; la prima contiene 30 palline bianche, 15 rosse e 5 verdi; la seconda 10 palline bianche, 25 rosse e 15 nere. Si estrae una pallina da ogni urna. Calcolare la probabilità che:

a) le due palline siano dello stesso colore; b) vi sia *almeno* una pallina bianca;

c) le due palline siano di colore diverso.

Inoltre un giocatore vince L 17.000 se estrae una pallina rossa da entrambe le urne. Dire quale dev'essere la sua posta perché il gioco sia equo. $\left[\frac{27}{100};\ \frac{17}{25};\ \frac{73}{100};\ 3.000\right]$

28. In un gioco, un giocatore A che ha la probabilità p di vincere, punta a lire. Determinare la posta b del banco B, perché il gioco sia equo, nei seguenti casi:

a) $a=3.000$; $p=\frac{2}{5}$; b) $a=15.000$; $p=\frac{1}{3}$; c) $a=30.000$; $p=\frac{3}{4}$;

d) $a=28.000$; $p=\frac{4}{11}$; e) $a=48.000$; $p=\frac{4}{7}$; f) $a=800.000$; $p=\frac{1}{2}$.

[a) 4.500; b) 30.000; c) 10.000; d) 49.000; e) 36.000; f) 800.000]

29. Estraendo un numero dal gioco della tombola:

a) si vince L 10.000 se il numero è divisibile per 4;

b) si perde L 5.000 in caso contrario.

Provare che il gioco non è equo e determinare come modificare la vincita per renderlo equo. [15.454]

(giocando 3 numeri)

30. Per ogni lira giocata sul *terno* di una sola ruota, lo Stato italiano paga L 4.250. Provare che il gioco *non* è equo e determinare quanto dovrebbe pagare lo Stato perché lo sia. [L 11.747]

31. Per ogni lira giocata sulla *quaterna* di una sola ruota, lo Stato italiano paga L 80.000. Provare che il gioco non è *equo* e determinare quanto dovrebbe pagare lo Stato perché lo sia. [L 511.037]

32. Per ogni lira giocata sulla *cinquina* di una sola ruota, lo Stato italiano paga L 1.000.000. Provare che il gioco non è *equo* e determinare quanto dovrebbe pagare lo Stato perché lo sia. [L 43.949.267]

33. Si determini il valore medio, la varianza e lo scarto quadratico medio della somma dei punti ottenuti nel lancio di una coppia di dadi non truccati. $\left[7;\ \frac{35}{6};\ \sqrt{\frac{35}{6}}\right]$

34. Si lanci tre volte una moneta truccata in modo che sia $P(T) = \frac{3}{4}$ e $P(C) = \frac{1}{4}$.

Sia X la variabile casuale che rappresenta la più lunga sequenza di teste che si presenta. Determinare la funzione di probabilità, il valore medio, la varianza e lo scarto quadratico medio di X.
$[M(X) = 2,1;\ V(X) = 0,8;\ \sigma = 0,9]$

35. In una lotteria paesana, si utilizza una ruota piena divisa in 6 settori eguali di colori differenti. La circonferenza della ruota è munita di denti che dividono ciascuno dei 6 settori in 20 settori eguali, dei quali uno porta la cifra 5, due la cifra 2 e i rimanenti 17 la cifra 1. Una lama flessibile indica, quando la ruota si ferma, il colore vincente e, allo stesso tempo il numero dei chilogrammi di zucchero (5; 2 o 1) ottenuti da un eventuale vincitore.
Qual è il valore medio del numero di chilogrammi di zucchero guadagnati in un tiro? Se un tiro costa 1000 lire, qual è il prezzo medio del chilogrammo di zucchero acquistato con questa lotteria?

$$\left[M(X) = \frac{1}{6}\left(\frac{17}{20} + \frac{4}{20} + \frac{5}{20}\right) = \frac{13}{60};\ 1000 \cdot \frac{60}{13}\text{ lire} \simeq 4615\text{ lire...}\right]$$

36. Un'urna contiene 7 gettoni (indistinguibili al tatto). Uno porta la cifra 0; due portano la cifra 1; due portano la cifra 2; due portano la cifra 3. Si estraggono a caso dall'urna due gettoni. Si consideri la variabile aleatoria X che è eguale alla somma dei numeri che compaiono sui due gettoni estratti. Calcolare e dare sotto forma di tabella la distribuzione di probabilità X; disegnare il grafico della distribuzione e della funzione di distribuzione di probabilità; calcolare il valore medio; la varianza e lo scarto quadratico medio. $[m = 3,43;\ \sigma^2 = 1,7686;\ \sigma = 1,33]$

37. Si utilizza un mazzo di 32 carte. Si conviene di attribuire il valore 11 agli assi; il valore 10 alle figure e ai dieci; il valore 9 ai nove; il valore 8 agli otto; il valore 7 ai sette. Si estraggono a caso due carte e si considera la legge di probabilità in cui la variabile aleatoria X dà la somma dei valori delle due carte estratte. Scrivere, sotto forma di tabella, la lista dei valori possibili di X e le probabilità corrispondenti. Tracciare il grafico della distribuzione e della funzione di distribuzione di questa legge di probabilità. Calcolare il valore medio, la varianza e lo scarto quadratico medio.
$[m = 18,75;\ \sigma^2 = 2,969;\ \sigma = 1,72]$

38. Si lanci un dado. Supponiamo che la variabile X indichi il doppio del numero che si presenta, e che Y assuma i valori 1 o 3 a seconda che si presenti un numero dispari o pari. Determinare la funzione di probabilità, il valore medio, la varianza e lo scarto quadratico medio di:

a) X, $[m_X = 7;\ \sigma^2 = 11,7;\ \sigma_X = 3,4]$

b) Y, $[m_Y = 2;\ \sigma_Y^2 = 1;\ \sigma_Y = 1]$

c) $X + Y$, $[M(X+Y) = 9;\ V(X+Y) = 14,7;\ \sigma_{X+Y} = 3,8]$

d) $X \cdot Y$, $[M(XY) = 15;\ V(XY) = 134,3;\ \sigma_{XY} = 11,6]$

(Bernoulli)

1. Un evento ha probabilità costante $p = \frac{1}{3}$. Calcolare la probabilità che esso si verifichi:

a) 1 volta su 3 prove; *b*) 2 volte su 6; *c*) 5 volte su 5; *d*) *almeno* 2 volte su 7; *e*) *non più* di 2 volte su 6.

$\left[a)\ \frac{4}{9},\ b)\ \frac{80}{243},\ c)\ \frac{1}{243},\ d)\ \frac{1611}{2187},\ e)\ \frac{496}{729}\right]$

2. Nel lancio ripetuto di un dado regolare, si determini la probabilità che l'evento «*faccia* 3» si verifichi:

a) 3 volte su 5; *b*) 4 volte su 4; *c*) *almeno una volta* su 4; *d*) *non più* di 2 volte su 6.

[*a*) 0,03215; *b*) 0,00077; *c*) 0,51775; *d*) 0,93771]

3. Nel gioco «*testa-croce*» con una moneta regolare, determinare le probabilità dei seguenti eventi:

a) 2 volte «*croce*» su 5 lanci; *b*) 5«*croce*» su 5; *c*) 2 «*testa*» su 6; *d*) *almeno* 2 «*testa*» su 6; *e*) *non più* di 3 «*croce*» su 5.

$\left[a)\ \frac{5}{16};\ b)\ \frac{1}{32};\ c)\ \frac{15}{64};\ d)\ \frac{57}{64};\ e)\ \frac{13}{16}\right]$

4. Un evento ha probabilità costante $p = 0,2$. Calcolare la probabilità che esso si verifichi:

a) 2 volte su 5 prove; *b*) 5 volte su 6; *c*) 4 volte su 8; *d*) *almeno* 3 volte su 4; *e*) *non più* di 99 volte su 100.

[*a*) 0,2048; *b*) 0,0015; *c*) 0,0459; *d*) 0,0272; *e*) $1 - (0,2)^{100}$]

5. Un evento ha probabilità costante $p = 0,8$. Trovare la probabilità che si verifichi:

a) 3 volte su 6; *b*) 5 volte su 9; *c*) *almeno* 3 volte su 4; *d*) *non più* di 9 volte su 11.

[*a*) 0,0819; *b*) 0,0661, *c*) 0,8192; *d*) 0,6779]

6. Un'urna contiene 10 palline, 9 delle quali sono bianche. Si estrae a caso una pallina e, dopo averne osservato il colore, si rimette nell'urna. Trovare la probabilità che l'evento «*pallina bianca*» si verifichi:

a) 1 sola volta su 4 estrazioni; *b*) 2 volte su 7; *c*) *almeno* 5 volte su 6; *d*) *non più* di 2 volte su 3.

[*a*) 0,0036; *b*) $1701 \cdot 10^{-7}$; *c*) 0,886; *d*) 0,271]

7. Si lanciano ripetutamente due dadi regolari. Determinare la probabilità di «*doppio sei*»:

a) 6 volte su 6; *b*) *una volta* su 5; *c*) *almeno una* volta su 5; *d*) *non più* di 2 volte su 10.

[*a*) 6^{-12}; *b*) 0,1241; *c*) 0,1310; *d*) 0,9978]

8. Determinare la probabilità che lanciando una moneta regolare tre volte si presentino:

a) tre teste $\left[\frac{1}{8}\right]$; *b*) 2 teste e 1 croce $\left[\frac{3}{8}\right]$;

c) 2 croci e 1 testa $\left[\frac{3}{8}\right]$; *d*) almeno una testa $\left[\frac{7}{8}\right]$;

e) non più di una croce $\left[\frac{1}{2}\right]$; *f*) neppure una testa $\left[\frac{1}{8}\right]$.

9. Una famiglia ha quattro figli. Supponendo eguali $\left(a\ \frac{1}{2}\right)$ le probabilità che nasca un maschio o una femmina, determinare la probabilità che ci sia:

a) almeno una femmina $\left[\frac{15}{16}\right]$

b) almeno un maschio e una femmina. $\left[\frac{7}{8}\right]$

10. Una famiglia ha sei figli. Supponendo eguali le probabilità che nasca un maschio o una femmina, determinare la probabilità che ci siano:

a) tre maschi e tre femmine; $\left[\frac{5}{16}\right]$ *b*) meno femmine che maschi. $\left[\frac{11}{32}\right]$

11. Nel lancio di un dado regolare la vittoria consiste nell'uscita di uno dei primi quattro numeri. Determinare la probabilità che in quattro lanci si abbiano:

a) esattamente due vittorie; $\left[\frac{8}{27}\right]$ *b*) almeno una vittoria; $\left[\frac{80}{81}\right]$

c) più di due vittorie. $\left[\frac{16}{27}\right]$

12. La probabilità che un tiratore faccia centro è $\frac{1}{4}$. Determinare:

a) la probabilità che su 7 colpi faccia centro almeno due volte; $\left[\frac{4547}{8192}\right]$

b) il numero delle volte che deve sparare affinché la probabilità che egli faccia centro almeno una volta sia maggiore di $\frac{2}{3}$. [4 volte]

13. Determinare il numero probabile di famiglie, su 2000 famiglie con 4 figli ciascuna, che abbiano:

a) almeno un maschio, [1875] *b*) 2 maschi, [750]

c) un maschio o due femmine, [1250] *d*) nessuna femmina. [125]

14. Il 20% dei pezzi prodotti da una macchina è difettoso. Determinare la probabilità che, su 4 pezzi scelti a caso, siano difettosi 0, o 1, meno di 2, o al massimo 2 pezzi.

[0,4096; 0,4096; 0,8192; 0,9728]

15. Determinare la probabilità di almeno una volta il punteggio «*sette*» in tre lanci di una coppia di dadi regolari.

$\left[\frac{91}{216}\right]$

16. Determinare la probabilità perché, lanciando quattro volte un dado regolare, si ottenga due volte il «*sei*».

$\left[\frac{25}{216}\right]$

17. Si lancia 12 volte un dado regolare. Determinare la probabilità di ottenere il punteggio «*quattro*» esattamente tre volte; almeno tre volte.

$\left[220 \cdot \frac{5^9}{6^{12}};\ 1 - 151 \cdot \frac{5^{10}}{6^{12}}\right]$

18. Determinare, in %, a meno di 0,001, la probabilità perché ci siano due maschi in una famiglia di sei figli.

$\left[\frac{15}{64} = 0,23437,\ \text{cioè: } 23,437\%\right]$

19. Determinare la probabilità perché, in una famiglia di 8 figli, vi siano esattamente 5 femmine; almeno 5 femmine.

$\left[\frac{7}{32};\ \frac{93}{256}\right]$

20. Una pianta presenta fiori bianchi o rossi, distribuiti a caso, 1 bianco e 9 rossi su 10 fiori. Si raccolgono 20 fiori a caso. Determinare la probabilità di avere 5 fiori bianchi e 15 rossi su 20 fiori. [3,192%]

21. Un'urna contiene 10 palline bianche e 6 nere. Si estraggono 4 palline a caso. Determinare le probabilità di ottenere 0, 1, 2, 3 o 4 palline bianche. $\left[\frac{3}{364}; \frac{40}{364}; \frac{135}{364}; \frac{144}{364}; \frac{42}{364}\right]$

22. Un evento ha probabilità costante 0,6. Determinare *la distribuzione binomiale* relativa a 6 prove e *costruirne l'istogramma.*

23. Un evento ha probabilità costante 0,2. Determinare *la distribuzione di probabilità della frequenza* di tale evento in 4 prove e *costruirne l'istogramma.*

24. Un evento ha probabilità costante $p = 0,8$. Determinare *la distribuzione di probabilità della frequenza* di tale evento in 5 prove, e *costruirne l'istogramma.*

25. Un evento ha probabilità costante $p = \frac{3}{8}$. Determinare *la distribuzione binomiale della probabilità di frequenza* di tale evento in 4 prove, e *costruirne l'istogramma.*

26. Determinare la probabilità perché gettando 10 volte di seguito una coppia di dadi regolari, si ottenga:

a) almeno una volta il *doppio sei;* $\left[1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10} = 0,245\right]$

b) solo una volta il *doppio sei;* [0,216]

c) esattamente k volte il *doppio sei.* $\left[\binom{10}{k} \frac{35^{10-k}}{36^{10}}\right]$

27. Determinare la probabilità perché lanciando n volte una coppia di dadi regolari, si ottenga almeno una volta un «*doppio sei*». Determinare poi il numero minimo di lanci che occorre fare per avere almeno il 50% di possibilità d'avere estratto un «*doppio sei*» almeno una volta.

$$\left[1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = p;\ p > \frac{1}{2} \text{ se } \left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2} \text{ e, da cui (attenzione!): } n > \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35}.\right.$$

$$\left.\text{La disequazione è verificata a partire da } n = 25\right]$$

28. La probabilità che un pezzo costruito da una macchina sia difettoso è $p = 0,1$. Determinare il valore medio e lo scarto quadratico medio del numero dei pezzi difettosi su un totale di $n = 900$ pezzi. $[M = 90;\ \sigma = 9]$

29. Lo stesso problema precedente per $p = 0,02$ ed $n = 10.000$. $[M = 200;\ \sigma = 14]$

30. La probabilità che un tiratore colpisca un bersaglio è $p = \frac{2}{3}$. Egli tira 15 colpi. Trovare il valore medio e la varianza della variabile aleatoria X che rappresenta i colpi a segno. $\left[M(X) = 10;\ V(X) = \frac{10}{3}\right]$

31. Un'urna contiene due palline bianche e otto palline rosse. Tutte le estrazioni sono equiprobabili.

1) Si estraggono simultaneamente 3 palline dall'urna. Calcolare la probabilità dell'evento A: «l'estrazione comprende una pallina bianca e due rosse».

2) Si procede 5 volte di seguito all'estrazione di una pallina che si ripone nell'urna prima di ogni nuova estrazione. Determinare la probabilità d'estrarre 3 palline bianche, con le cinque estrazioni.

$$\left[1)\ \frac{C_{2,1}C_{8,2}}{C_{10,3}} = \frac{7}{15};\ 2)\ C_{5,3} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{32}{625}\right]$$

32. Si considerino due dadi cubici, regolari, le cui facce sono numerate da 1 a 6.

1) Si lanciano simultaneamente i due dadi. Qual è la probabilità d'ottenere una somma di due numeri maggiore o eguale a 10?

2) Si ripete questa prova cinque volte di seguito. Sia X la variabile aleatoria che associa a questi cinque lanci il numero di volte in cui si osserva un totale maggiore o eguale a 10.
Qual è la legge di probabilità di X, la sua speranza matematica e il suo scarto quadratico medio?

$$\left[1)\ \frac{1}{6};\ 2)\ \text{legge binomiale } B\left(5,\ \frac{1}{6}\right).\ M(X) = np = \frac{5}{6};\ V(X) = npq = \frac{25}{36};\ \sigma(X) = \frac{5}{6}\right]$$

33. Un commerciante vende nello stesso giorno sei televisori dello stesso tipo. La probabilità che un tale apparecchio sia in buon stato di funzionamento, dopo cinque anni, è $\frac{7}{10}$.
Calcolare la probabilità perché cinque anni più tardi:

1) esattamente quattro televisori siano in buon stato;
2) nessun televisore sia in buon stato di funzionamento;
3) due televisori, al più, siano in buon stato di funzionamento.

$$\left[\text{Si ha } P_x = \binom{6}{x} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{6-x} = \binom{6}{x} \frac{7^x \cdot 3^{6-x}}{10^6}.\ 1)\ P_4 = \frac{70470}{10^6}.\right.$$

$$\left.2)\ P_0 = \frac{729}{10^6}.\ 3)\ P = P_0 + P_1 + P_2 = \ldots = \frac{72675}{10^6}\right]$$

34. Si consideri un dado regolare, lo si lanci tre volte di seguito e per ciascun lancio si noti il numero ottenuto sulla faccia superiore.

a) Qual è la probabilità di ottenere la terna (4, 2, 1)?

b) Si effettua la prova cinque volte di seguito. Qual è la probabilità di ottenere *esattamente* tre volte il risultato (4, 2, 1)?

c) Qual è la probabilità di ottenere *almeno* tre volte il risultato (4, 2, 1)?

$$\left[\text{Posto } E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}, \text{ si ha } S = E^3, \text{ che ha } 6^3 = 216 \text{ terne. } a)\ P(\{(4,\ 2,\ 1)\}) = \frac{1}{216};\right.$$

$$b)\ P(X = 3) = C_{5,3} \cdot \left(\frac{1}{6^3}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6^3}\right)^2 = 10 \cdot \frac{(6^3 - 1)^2}{6^{15}} = \frac{462250}{6^{15}} \simeq 10^{-6}.\ c)\ P(X \geq 3) =$$

$$P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = C_{5,3} \cdot \left(\frac{1}{6^3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6^3}\right)^2 + C_{5,4} \cdot \left(\frac{1}{6^3}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{6^3}\right) + C_{5,5}\left(\frac{1}{6^3}\right) =$$

$$\left. = 10 \cdot \frac{(6^3 - 1)^2}{6^{15}} + 5\,\frac{6^3 - 1}{6^{15}} + \frac{1}{6^{15}} = \frac{463326}{6^{15}} \simeq 10^{-6}\right]$$

35. Determinare il parametro p della variabile aleatoria X di legge di distribuzione geometrica sapendo che: $\sigma^2(X) = 20;\ 90;\ 12;\ 2;\ 42;\ 342;\ 182;\ 30.$

$$\left[\text{Essendo } \sigma^2(X) = \frac{q}{p^2} = 20, \text{ risulta } 1 - p = 20\,p^2 \text{ da cui } p = \frac{1}{5}. \text{ Procedendo in modo analogo}\right.$$

$$\left.\text{si ottiene: } p = 0,1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{19};\ \frac{1}{14};\ \frac{1}{6}\right]$$

36. La probabilità che in una data località si abbia in un giorno un temporale a partire dal primo Luglio è costante e pari a 0,1. Calcolare la probabilità che si abbia il primo temporale:

1) il 7 Luglio; 2) nella prima decade di Luglio; 3) dopo il 5 Luglio.

$$\Sigma = (1-q)\frac{1-q^x}{1-q} = 1-q^x$$

$$\left[1)\ p(X = 7) = pq^6 = 0,1 \cdot 0,9^6;\quad 2)\ \sum_{x=1}^{10} pq^{x-1} = 1 - q^{10} = 1 - 0,9^{10};\right.$$

$$\left.3)\ p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5) = q^x = 0,9^5\right]$$

$$1-(1-q^5) = q^5$$

37. Si lancia varie volte e successivamente un dado. Calcolare il numero minimo di lanci da effettuarsi per ottenere per la prima volta il numero 1, con probabilità non inferiore a 0.95.

$$\left[p(X \leq x) = 1 - q^x \geq 0,95 \text{ e } q^x \leq 0,05, \text{ da cui: } x \log q \leq \log 0.05 \text{ ed essendo } q = \frac{5}{6} \text{ e } p = \frac{1}{6},\ x \geq \frac{\log 0,05}{\log \frac{5}{6}} = 17; \text{ il numero minimo di lanci è } 17\right]$$

38. L'1% dei pezzi di un lotto è difettoso. I pezzi sono estratti ad uno ad uno, controllati e rimessi assieme agli altri. Determinare il numero minimo dei pezzi da esaminare per ottenere con probabilità non inferiore a 0,95 il primo pezzo difettoso.

[$x \geq 298$; bisogna esaminare almeno 298 pezzi per poter trovare il primo pezzo difettoso con probabilità non inferiore a 0,95]

39. In una successione di prove di BERNOULLI determinare il numero minimo di prove in modo che la probabilità di ottenere per la prima volta il successo sia non inferiore ad α.

$$\left[\text{È } p(X \leq n) \geq \alpha; \text{ sostituendo e sviluppando } 1 - q^n \geq \alpha,\ q^n \leq 1 - \alpha,\ n\log q \leq \log(1-\alpha),\ n \geq \frac{\log(1-\alpha)}{\log q}\right]$$

40. Un giocatore ha probabilità 0,4 di superare un certo punteggio giocando a flipper. Sapendo che il giocatore smette di giocare quando supera per la prima volta tale punteggio, determinare il numero minimo di partite che deve giocare affinché la probabilità di smettere di giocare sia almeno di 0,95.

[$x \geq 6$]

41. Una cassa contiene dei pezzi di cui il 30% sono prodotti dalla fabbrica *A* ed il rimanente dalla fabbrica *B*. Si estrae un pezzo che viene esaminato e rimesso nella cassa. I pezzi hanno eguale probabilità di essere estratti e si differenziano solo per il marchio.

1) Determinare il numero minimo dei pezzi da esaminare in modo che con probabilità di almeno 99% sia estratto per la prima volta un pezzo prodotto dalla fabbrica *A*.

2) Determinare il numero medio dei pezzi esaminati dalla fabbrica *B* antecedenti il primo pezzo estratto prodotto dalla fabbrica *A*.

[1) $x \geq 13$; 2) $2,\overline{3}$]

42. Un'urna contiene 13 palline bianche e 39 nere. Estraendo, senza reinserimento, 13 palline, determinare la probabilità che:

a) 6 siano bianche; *b*) nessuna sia bianca.

$$\left[a)\ \frac{\binom{13}{6}\binom{39}{7}}{\binom{52}{13}};\ b)\ \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}\right]$$

43. Un mazzo di fiori ne contiene 5 rossi e 10 bianchi. Estraendone, a caso, 8, determinare la probabilità che:

a) 4 siano rossi; *b*) siano tutti bianchi; *c*) almeno uno sia rosso. $\left[a)\ \frac{70}{429};\ b)\ \frac{1}{143};\ c)\ \frac{142}{143}\right]$

44. Di 60 partecipanti a un'olimpiade, 20 sono della nazione organizzatrice, e 40 sono stranieri. Se si scelgono a caso 20 partecipanti, determinare la probabilità che:

a) 10 partecipanti siano stranieri; $\left[\dfrac{\binom{40}{10}\binom{20}{10}}{\binom{60}{20}}\right]$

b) non più di 2 siano stranieri. $\{[C_{40,0}C_{20,20} + C_{40,1}C_{20,19} + C_{40,2}C_{20,18}] : C_{60,20}\}$

45. Un'urna contiene 5 palline nere, 4 bianche e 3 rosse. Estraendo, con reinserimento, 6 palline a caso, determinare la probabilità di estrarre 3 palline nere, 2 bianche e 1 rossa. $\left[\dfrac{625}{5184}\right]$

46. Determinare la probabilità che, lanciando 8 volte un dado regolare, si presentino due volte i numeri 5 e 6 e una volta ciascuno gli altri numeri. $\left[\dfrac{35}{5832}\right]$

47. Un dado regolare viene lanciato 6 volte. Determinare la probabilità che:

a) ogni faccia si presenti una sola volta; $\left[\dfrac{5}{324}\right]$

b) il «quattro» si presenti una volta, il «*tre*» due volte e l'«*uno*» tre volte. $\left[\dfrac{5}{3888}\right]$

48. Le automobili, di un dato modello, costruite da una casa, sono il 50% rosse, il 30% bianche, il 20% azzurre. Determinare la probabilità che su 5 automobili, scelte a caso, 2 siano rosse, 1 azzurra e 2 bianche.

[0,135]

49. Un'urna contiene 80 palline: gialle, blu, bianche e rosse nel rapporto 1 : 2 : 3 : 4. Determinare la probabilità che, estraendo 10 palline, ci siano:

a) 1 pallina gialla, 2 blu, 3 bianche e 4 rosse: $[3,48 \cdot 10^{-2}]$

b) 2 palline gialle e 8 rosse. $[2,95 \cdot 10^{-4}]$

50. Determinare la probabilità di non ottenere né 1, né 2, né 3 in quattro lanci di un dado regolare. $\left[\dfrac{1}{16}\right]$

ESERCIZI SVOLTI

1. *Un centralino telefonico automatico riceve in media 300 chiamate all'ora. Qual è la probabilità che, in un dato minuto, riceverà esattamente due chiamate?*

Consideriamo il numero delle chiamate al minuto come il numero dei successi in una serie di prove di BERNOULLI. Qui $n = 300$ perché ci sono 300 chiamate e la probabilità che una chiamata si presenti in un dato minuto è $p = \dfrac{1}{60}$. Poiché p è piccolo, applichiamo l'approssimazione di POISSON della distribuzione binomiale, con $\lambda = np = 5$.
Si deve determinare $P(X = 2)$. Per la formula di POISSON, si ha: $P(X = 2) = \dfrac{5^2}{2!}e^{-5} = \dfrac{25}{2e^5} \simeq 0,09$.

2. *La probabilità di centrare un bersaglio è 0,001, per ogni colpo. Determinare la probabilità di centrare un bersaglio con due o più pallottole, se il numero dei colpi sparati è 5000.*

Considerando ogni colpo sparato come una prova e considerando il raggiungimento del bersaglio come un evento, possiamo utilizzare la formula di POISSON per calcolare la probabilità $P(X \geq 2)$.
Nel nostro caso: $\lambda = np = 0,001 \cdot 5000 = 5$.
La probabilità cercata è: $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.

Essendo: $P(X = 0) = e^{-5}$ e $P(X = 1) = 5e^{-5}$, si ha: $P(X \geq 2) = 1 - 6e^{-5} \simeq 0,9596$.

51. Per la distribuzione di POISSON $p(x, \lambda) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, provare che:

$$p(2,1) = 0,184; \qquad p\left(3, \frac{1}{2}\right) = 0,013; \qquad p(2,7) = 0,022.$$

52. Nella produzione di pezzi fabbricati da una macchina, la percentuale dei pezzi difettosi è lo 0,4%. Determinare la probabilità di trovare 5 pezzi difettosi su 5000 scelti a caso.

[0,000055]

53. Un libro di 500 pagine contiene 300 errori di stampa. Determinare la probabilità che su una pagina aperta a caso ci siano:

a) esattamente due errori; *b*) non meno di due errori. [0,0988; 0,122]

54. Su una popolazione di 10.000 persone si sono osservati 103 albini. Indicando con p_x la probabilità di osservare x albini su 100 persone, calcolare p_x, per $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$.

[0,357; 0,368; 0,189; 0,0650; 0,0167; 0,0034; 0,00058; 0,00009]

55. La probabilità che una persona sia allergica a una dato vaccino è 0,002. Determinare la probabilità che, su 1000 individui, siano allergici al vaccino:

a) più di 2; *b*) esattamente 3 individui. [0,323; 0,180]

56. Un centralino telefonico riceve in media 150 chiamate all'ora. Nell'ipotesi che le chiamate, in un dato intervallo di tempo, seguano una distribuzione di POISSON, determinare: la probabilità che, in due minuti, il centralino riceva:

a) tre chiamate; *b*) almeno una chiamata; *c*) almeno tre chiamate.

$$\left[a)\ P(X=3) = \frac{1}{6} \cdot 5^3 \cdot e^{-5} \simeq 0,14;\ b)\ P(X \geq 1) = 1 - e^{-5} \simeq 0,99;\right.$$
$$\left. c)\ P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{1}{2}5^2\right) \simeq 0,875\right]$$