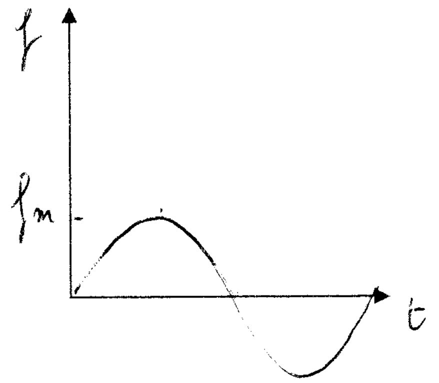
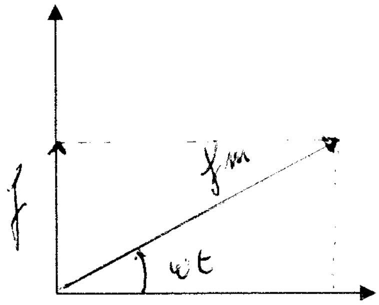
ANALISI DEL CIRCUITO RCL

Per determinare una relazione tra la corrente alternata e la forza elettromotrice forzante è utile introdurre il metodo dei **FASORI**.

I fasori sono vettori rotanti in un piano con velocità angolare ω e sono adatti a rappresentare grandezze che variano sinusoidalmente. Il modulo del vettore rappresenta il massimo valore che assume la grandezza considerata, mentre la sua proiezione su uno degli assi rappresenta il valore all'istante t, risultando il modulo del vettore moltiplicato per il seno o il coseno di ωt.

Ad esempio, la forza elettromotrice alternata $f = f_{max} \cdot sen\omega t$, può essere rappresentata sia con una sinusoide sia con un fasore.

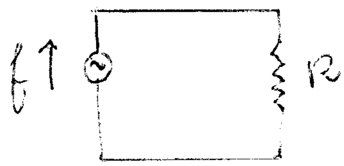




Per ricavare un'equazione che descriva l'andamento della corrente nel circuito RCL è conveniente analizzare dapprima separatamente circuiti in corrente alternata con sola resistenza, sola capacità, sola induttanza.

CIRCUITO RESISTIVO

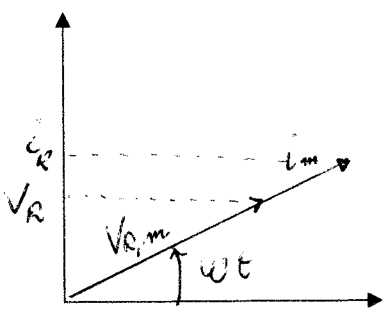
Supponiamo che sia $f = f_{max} \cdot sen\omega t$,
si avrà necessariamente che $V_R = V_{R\max} \cdot sen\omega t$



Pertanto la corrente, per la legge di Ohm, sarà:

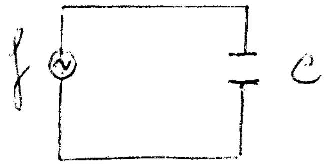
$$i_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V_{R\max}}{R} sen\omega t = i_{R\max} sen\omega t$$

Si trova che in questo caso potenziale e corrente sono in fase, vale a dire aggiungono il valore massimo e minimo allo stesso istante. Nella rappresentazione con i fasori, ciò equivale al fatto che i due fasori della corrente e del potenziale sono sovrapposti (girano insieme...).



CIRCUITO CAPACITIVO

Supponiamo ancora che sia $f = f_{max} \cdot sen\omega t$,
si avrà necessariamente che $V_C = V_{C\max} \cdot sen\omega t$



Sappiamo che per un condensatore:

$$q = CV_C = CV_{C\max} sen\omega t$$

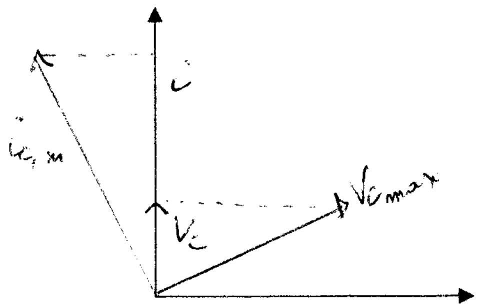
Quindi:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \omega C V_{C\max} \cos\omega t$$

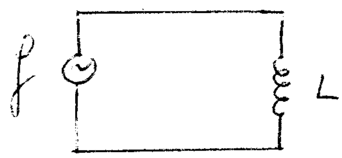
Per analogia col circuito resistivo, introduciamo la grandezza $X_C = \frac{1}{\omega C}$, detta "reattanza capacitiva". Osserviamo anche che $\cos\omega t = sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Si ha quindi:

$$i_C = \frac{V_{C\max}}{X_C} sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = i_{C\max} sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ciò significa che differenza di potenziale e corrente sono sfasate di 90°; la corrente è in anticipo di 90° rispetto al potenziale o, equivalentemente, il potenziale è in ritardo di 90° rispetto alla corrente. (Si pensino i fasori ruotare in senso antiorario)



CIRCUITO INDUTTIVO



Supponiamo ancora che sia $f = f_{max} \cdot sen\omega t$,
si avrà necessariamente che $V_L = V_{L\max} \cdot sen\omega t$.

Sappiamo che il potenziale ai capi dell'induttanza è l'opposto delle forza elettromotrice autoindotta.

$$V_L = L\frac{di}{dt}, \text{ quindi: } \frac{di}{dt} = \frac{V_L}{L} = \frac{V_{L\max}}{L} sen\omega t$$

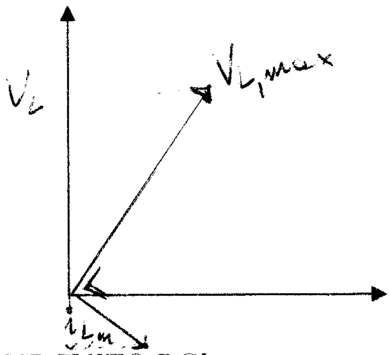
$$i_L = \int di_L = \int \frac{V_{L\max}}{L} sen\,\omega t dt = -\frac{V_{L\max}}{\omega L}\cos\omega t$$

Per analogia col circuito resistivo, introduciamo la grandezza $X_L = \omega L$, detta "reattanza induttiva".

Osserviamo che: $-\cos\omega t = sen\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Quindi:

$$i_L = \frac{V_{L\max}}{X_L} sen\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_{L\max} sen\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

In questo caso la corrente è in ritardo di 90° sul potenziale, oppure il potenziale è in anticipo di 90° sulla corrente.



CIRCUITO RCL

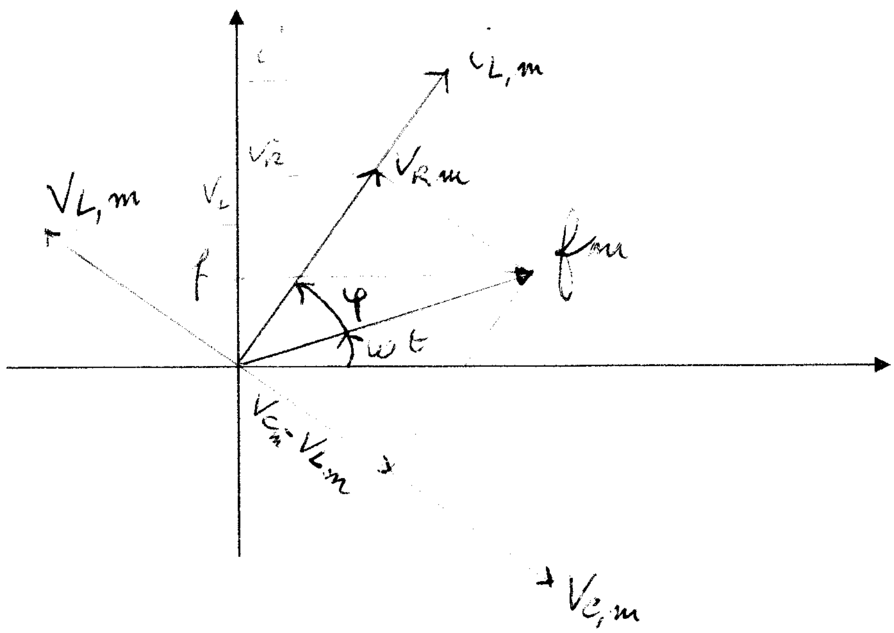
Inserendo ora tutti i tre elementi sopra esaminati nel circuito, si avrà che la corrente che circola sarà ovviamente unica; si vuole trovare in che modo tale corrente si relaziona con la forza elettromotrice applicata dall'esterno mediante un generatore.

Per il teorema della maglia: $f = V_R + V_C + V_L$, istante per istante.

Sul piano dei fasori i potenziali all'istante t sono le proiezioni sull'asse y dei fasori stessi, cioè le componenti y dei vettori. Si sa dal calcolo vettoriale che il vettore somma di più vettori ha come componenti la somma delle componenti omonime. Quindi alla relazione su scritta si può associare la somma vettoriale:

$$\overline{f}_{\max} = \overline{V}_{R\max} + \overline{V}_{C\max} + \overline{V}_{L\max}$$

Determiniamo quindi, sul piano dei fasori, il vettore rappresentante la forza elettromotrice massima come somma dei vettori raffiguranti le differenze di potenziale massime.



Si disegna dapprima il fasore della corrente, poi di conseguenza i fasori delle tre differenze di potenziale, in base a quanto trovato precedentemente.
Disegnato il vettore $\overline{f}_{max}$ come somma dei tre vettori, si nota che, se tale vettore forma, come supposto, un angolo ωt con l'asse x, il fasore della corrente non è in fase con la forza elettromotrice. Tra i due vettori si forma un angolo φ, detto sfasamento o angolo di fase.
Per il teorema di Pitagora si ha che:

$$f_{max}^2 = V_{R\,max}^2 + \left(V_{C\,max} - V_{L\,max}\right)^2 \qquad \text{cioè}$$

$$f_{max}^2 = \left(Ri_{max}\right)^2 + \left(X_C i_{max} - X_L i_{max}\right)^2$$

Si ricava con semplici passaggi:

$$i_{max} = \frac{f_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(X_C - X_L\right)^2}}$$

Il termine $Z = \sqrt{R^2 + \left(X_C - X_L\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$ si chiama *impedenza* del circuito RCL. Si misura anch'essa in Ohm ed è una grandezza che varia al variare di ω, cioè al variare della frequenza di oscillazione. L'equazione che descrive il circuito RCL è quindi:

$\boxed{i_{max} = \frac{f_{max}}{Z}}$, equazione che presenta un'analogia formale con la prima legge di Ohm.

E' facile vedere che, a parità di forza elettromotrice applicata, i_{max} assume valore massimo quando l'impedenza è minima, cioè quando il termine in parentesi si annulla. Ciò accade se $X_C = X_L$, cioè $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, cioè quando la pulsazione imposta è uguale alla pulsazione caratteristica del circuito LC (condizione di risonanza).

Osservando il disegno, si trovano anche le relazioni:

$$tg\varphi = \frac{V_{C\,max} - V_{L\,max}}{V_{R\,max}} = \frac{X_C - X_L}{R} \qquad \text{e} \qquad \cos\varphi = \frac{V_{R\,max}}{f_{max}} = \frac{R}{Z}$$

Si vede che la condizione di risonanza equivale a porre tg φ = 0, cioè φ = 0; si ha la massima ampiezza delle oscillazioni quando corrente e forza elettromotrice sono in fase.

Potenza nei circuiti a corrente alternata

La potenza fornita dall'alternatore compensa la perdita di energia per effetto Joule. La potenza istantanea dissipata nel resistore di un circuito RCL è data da:

$$P = Ri^2 = R\left[i_{max}\, sen(\omega t + \Phi)\right]^2 = Ri_{max}^2\, sen^2(\omega t + \Phi).$$

Per avere indicazioni pratiche sulle caratteristiche di un circuito in corrente alternata, si utilizzano valori medi, essendo la grandezze variabili sinusoidalmente nel tempo.
Il valore medio della funzione $y = sen^2 x$ nel suo periodo si determina col teorema della media del calcolo integrale ed è ½.

La potenza media è quindi $P = Ri_{max}^2 \dfrac{1}{2} = R\left(\dfrac{i_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2$. Il valore $\bar{i} = \dfrac{i_{max}}{\sqrt{2}}$ si chiama corrente quadratica media, analogamente sarà per la forza elettromotrice, $\overline{f} = \dfrac{f_{max}}{\sqrt{2}}$, essendo questa in rapporto Z con la corrente. Si può quindi riscrivere la legge del circuito RCL considerando i valori medi (efficaci) della corrente e della forza elettromotrice:

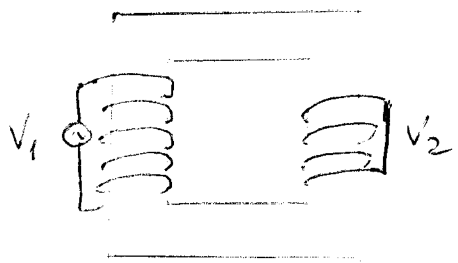
$$\bar{i} = \frac{\overline{f}}{Z}$$

La potenza media quindi sarà $\overline{P} = R\bar{i}\cdot\bar{i} = R\left(\dfrac{\overline{f}}{Z}\right)\cdot\bar{i} = \dfrac{R}{Z}\overline{f}\cdot\bar{i} = \cos\varphi\overline{f}\cdot\bar{i}$,

dove $\cos\varphi$ è detto fattore di potenza. Si noti che la potenza assume valore massimo quando $\cos\varphi = 1$, cioè quando $\varphi = 0$, condizione di risonanza.

Trasformatore di corrente alternata

Serve a trasformare una differenza di potenziale alternata, riducendola o amplificandola.
Consideriamo due avvolgimenti intorno ad uno stesso nucleo magnetico, il primo solenoide è collegato ad un generatore di corrente alternata. La corrente genera un campo B a flusso variabile.



Si può affermare che tutto il flusso del campo magnetico generato dal primo solenoide sia concatenato con il secondo. Anche nella pratica le perdite di energia sono molto ridotte, sotto l'1 %.
Applicando la legge di Faraday:

$$V_1 = -\frac{d(N_1\Phi_B)}{dt};\ V_2 = -\frac{d(N_2\Phi_B)}{dt};\ \text{si ottiene: } -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}; V_2 = \frac{N_2}{N_1}V_1.$$

Il potenziale risulta così amplificato se $N_2 > N_1$, o ridotto se $N_2 < N_1$. Si avranno quindi trasformatori riducenti o amplificanti; dato che deve valere il principio di conservazione dell'energia, uguagliando le potenze medie, avremo che le correnti sono inversamente proporzionali ai potenziali $P = V_1 i_1 = V_2 i_2$.