Vito Volterra e il modello preda-predatore

Vito Volterra

- Nasce ad Ancona nel 1860 da una famiglia ebrea molto povera
- Frequenta la Scuola Normale Superiore di Pisa e si laurea in fisica con una tesi di idrodinamica
- A 23 anni diventa professore di meccanica razionale all'università di Pisa
- Svolge ricerche nell'ambito della **fisica matematica**, che si occupa di trovare metodi risolutivi matematici per formulare teorie fisiche
- Nel 1905 è nominato senatore del regno d'Italia per i suoi meriti scientifici

- È un attivo interventista durante la prima guerra mondiale ed entra nel *Corpo Militare degli Ingegneri del Regio Esercito Italiano*.
- Si interessa alla **biomatematica** e studia i <u>meccanismi di interazione tra più specie conviventi</u>
- Nel 1920 viene nominato vicepresidente e in seguito presidente dell'<u>Accademia dei Lincei</u>
- Nel 1931 si rifiuta di prestare giuramento di fedeltà al fascismo e perde la cattedra di Fisica matematica; inoltre decade dall’accademia dei Lincei.
- Alla fine della sua vita torna a Roma, ma essendo senatore non è toccato dalle leggi razziali del 1938 grazie alla *discriminazione regia*
- Rimane senatore fino alla morte
- Muore a Roma nel 1940

L’epoca d’oro della biomatematica

- All’inizio dell’Ottocento nasce l’interesse per lo studio delle epidemie e dell’efficacia delle vaccinazioni
- In questo periodo vengono introdotte alcune definizioni di crescita di popolazione di una specie (Malthus e Verhulst)

- Con **Volterra** all’inizio del Novecento si assiste a un *salto di qualità* della biomatematica. Volterra inaugura una stagione prolifica della biomatematica che porterà al fiorire di modelli differenziali in ambito biomedico.
- Infatti applica gli strumenti dell’analisi matematica ad alcune situazioni biologiche, con le debite approssimazioni e riducendo il numero di variabili.

La **Fisica matematica** è quella branca della matematica che fornisce metodi matematici rigorosi per la formulazione di teorie fisiche

Già **Galileo** affermava che l'universo è scritto in linguaggio matematico, e riteneva dunque fondamentale l'uso della matematica per lo studio della fisica

Newton si servì di strumenti matematici da lui stessi ideati, come calcolo differenziale e integrale, per elaborare la meccanica.

Newton, studiando il moto, si rende conto che le componenti del vettore forza coincidono con i termini: mx'' , my'', mz'', cioè con i prodotti della massa per le tre componenti dell'accelerazione. Infatti

$$\overrightarrow{F_x} = m \cdot \overrightarrow{a_x} = m \cdot x''(t)$$
$$\overrightarrow{F_y} = m \cdot \overrightarrow{a_y} = m \cdot y''(t)$$
$$\overrightarrow{F_z} = m \cdot \overrightarrow{a_z} = m \cdot z''(t)$$

Dunque l'equazione che descrive il moto di un corpo è sempre un sistema di tre **equazioni differenziali**, ovvero equazioni che hanno come incognita una funzione, che compare nell'equazione tramite una o più sue derivate.

Questa equazione ha una sola soluzione, a patto che vengano fornite le <u>condizioni iniziali</u> (in questo caso x_0, y_0, z_0 e v_0).

Esempio: moto armonico

Il moto armonico è un moto rettilineo dove la forza agente sul corpo è la <u>forza elastica</u>, che è direttamente proporzionale all'allungamento della molla rispetto alla sua posizione di riposo e ha verso opposto a esso. La forza sarà quindi

$$F_{el} = -k \cdot x = m \cdot a$$

Dove k è la costante elastica della molla e x l'allungamento

A questo punto, sostituendo con quanto trovato prima si avrà

$$a(t) = x''(t) = -\frac{k \cdot x(t)}{m}$$

Se $x(0) \; = A$ e $v(0) = 0$ l'equazione ha la soluzione:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Allora la velocità sarà

$$v(t) = x'(t) = A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Le equazioni differenziali vengono utilizzate da Volterra

per lo studio delle dinamiche delle popolazioni.

Nel 1919 pubblica ***Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi***

Modello preda-predatore
Premessa:

- Lo zoologo Umberto D’Ancona, genero di Volterra, studia le interazioni tra specie di pesce
- Durante la prima guerra mondiale registra un **aumento** importante di squali e razze
- Si pensa che ciò sia dovuto al **calo della pesca**, e quindi all’aumento delle prede dei selaci
- Si rivolge a Volterra chiedendogli spiegazioni dal punto di vista matematico

→Volterra tratta il problema dal punto di vista matematico applicando **approssimazioni** e idealizzazioni

→Suppone che le **prede** non debbano lottare per la sopravvivenza e abbiano cibo a sufficienza per aumentare il loro numero indefinitamente

→Suppone che i **predatori** mangino solo quel tipo di preda e non altri animali, e che quindi in mancanza di prede il loro numero diminuisca rapidamente

→Prende in considerazione il **caso più semplice**, ovvero quello con due specie, anche se poi generalizzerà questo modello a *n* specie.

→Analizza anche altri casi, per esempio quello in cui due specie predatrici sono in competizione tra di loro

- Senza predatori le **prede** crescono senza limiti come prevede la legge di **Malthus**, quindi in maniera esponenziale, e il loro numero in funzione del tempo dipende solo dal numero iniziale

$$f'(t) = a \cdot f(t)$$

Dove $f(t)$ è il numero di prede all'istante t
a è una costante positiva
$f'(t)$ è la <u>variazione del numero di individui nel tempo</u>, ovvero la **derivata** della funzione $f(t)$.

Il numero di incontri tra elementi di specie diverse è proporzionale al numero di individui di entrambe le specie. Notiamo che se aumenta il numero di incontri tra specie viene favorita la specie predatrice, per la quale sarà più facile nutrirsi, mentre è sfavorita la specie preda che viene mangiata.

Il tasso di crescita dei predatori, così come il tasso di decrescita delle prede, sarà proporzionale al numero di incontri tra le due specie, quindi sarà pari all'espressione

$$g(t) \cdot f(t)$$

Moltiplicata per una costante

- Il tasso di **decrescita per le prede** dipende dal numero di incontri tra individui di due specie diverse, che a sua volta è proporzionale al numero di elementi di entrambe le specie

$$-b \cdot f(t) \cdot g(t)$$

Dove b è una costante positiva
$g(t)$ il numero di predatori all'istante t

- I predatori in assenza di prede muoiono, quindi hanno un tasso di decrescita che è proporzionale al numero di predatori stessi.

$$g'(t) = -c \cdot g(t)$$

Anche qui $g'(t)$ rappresenta la derivata del numero di predatori calcolata rispetto al tempo
d è la costante di decrescita naturale dei predatori

- Infine, il tasso di **crescita** per i **predatori** sarà proporzionale al numero di incontri che questi hanno con le loro prede. Infatti il numero di predatori cresce in relazione alla quantità di cibo a disposizione.

$$d \cdot f(t) \cdot \mathrm{g}(t)$$

Dove c è una costante positiva

In conclusione la variazione del numero di prede sarà

$$f'(t) = a \cdot f(t) - b \cdot f(t) \cdot g(t)$$

Mentre la variazione del numero di predatori ha valore

$$g'(t) = -c \cdot g(t) + d \cdot f(t) \cdot g(t)$$

Queste sono EQUAZIONI DIFFERENZIALI lineari di primo ordine

Osservazioni:

- Se le prede sono poche i predatori diminuiscono
- Se i predatori sono pochi le prede aumentano
- Se le prede sono tante i predatori aumentano
- Se i predatori sono tanti le prede diminuiscono

EQUILIBRIO

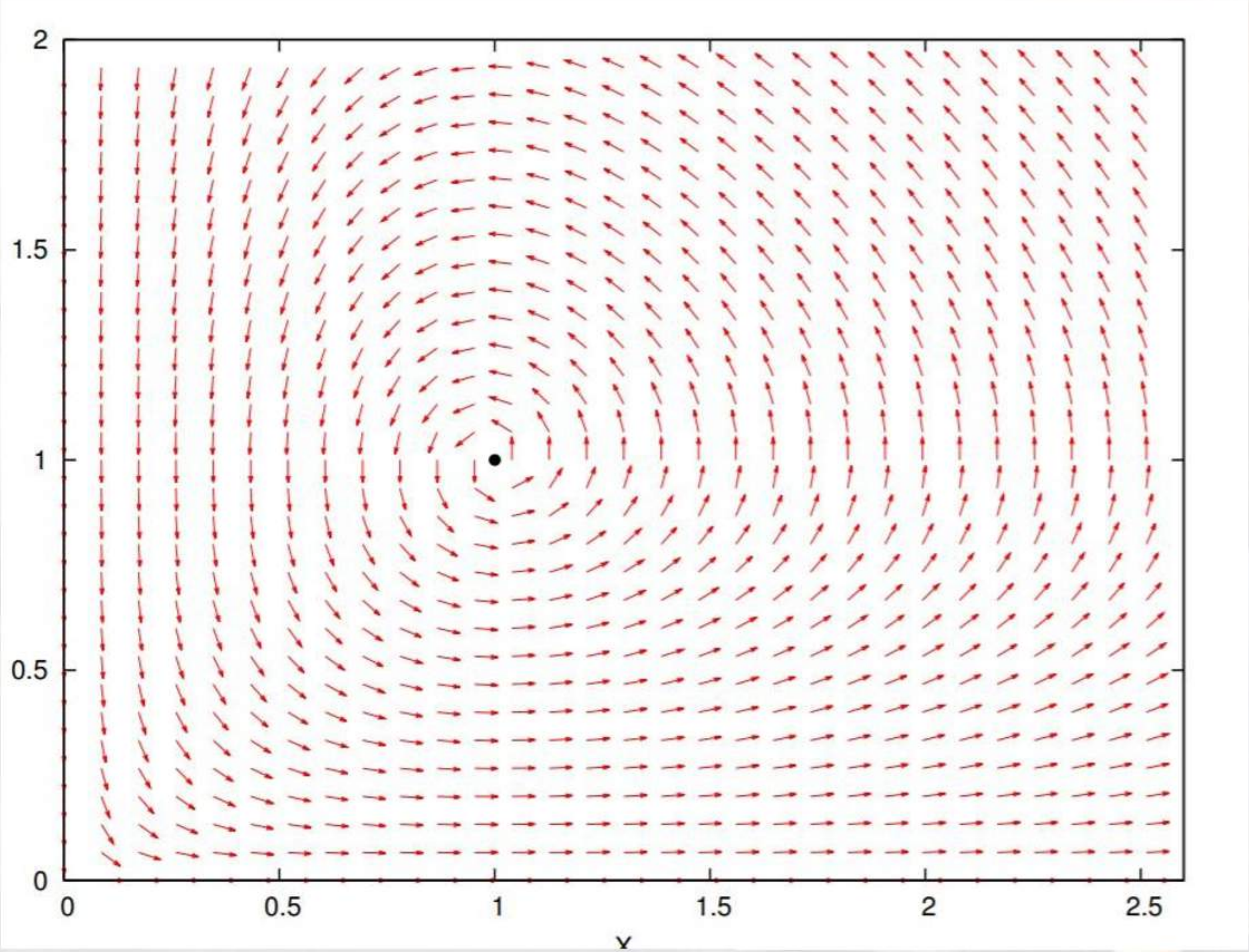
Si ha una situazione di equilibrio quando

$$x'(t) = y'(t) = 0$$

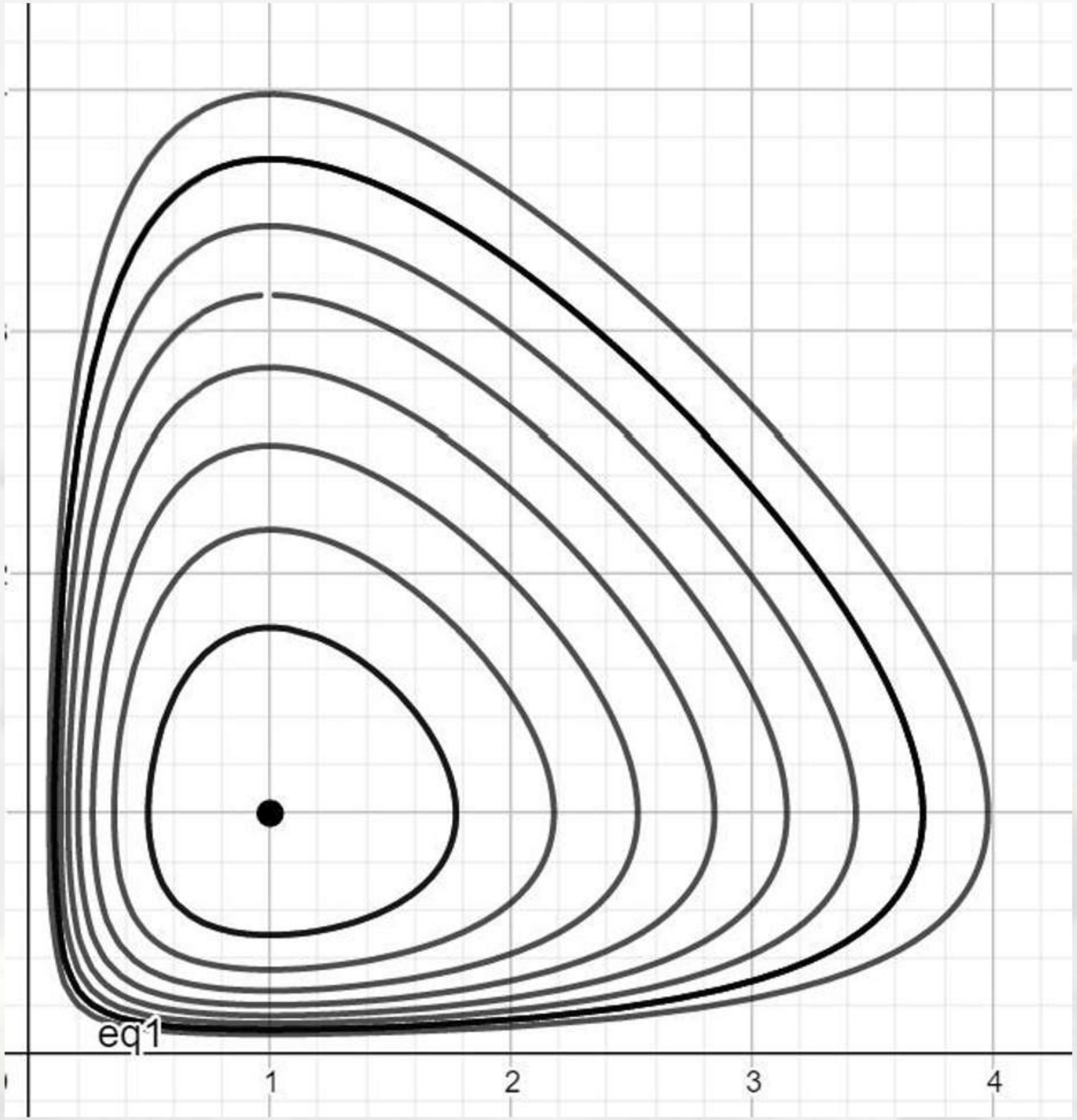
E quindi, scartando la soluzione $x(t) = y(t) = 0$ otteniamo

$$x(t) = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{a}{b}$$

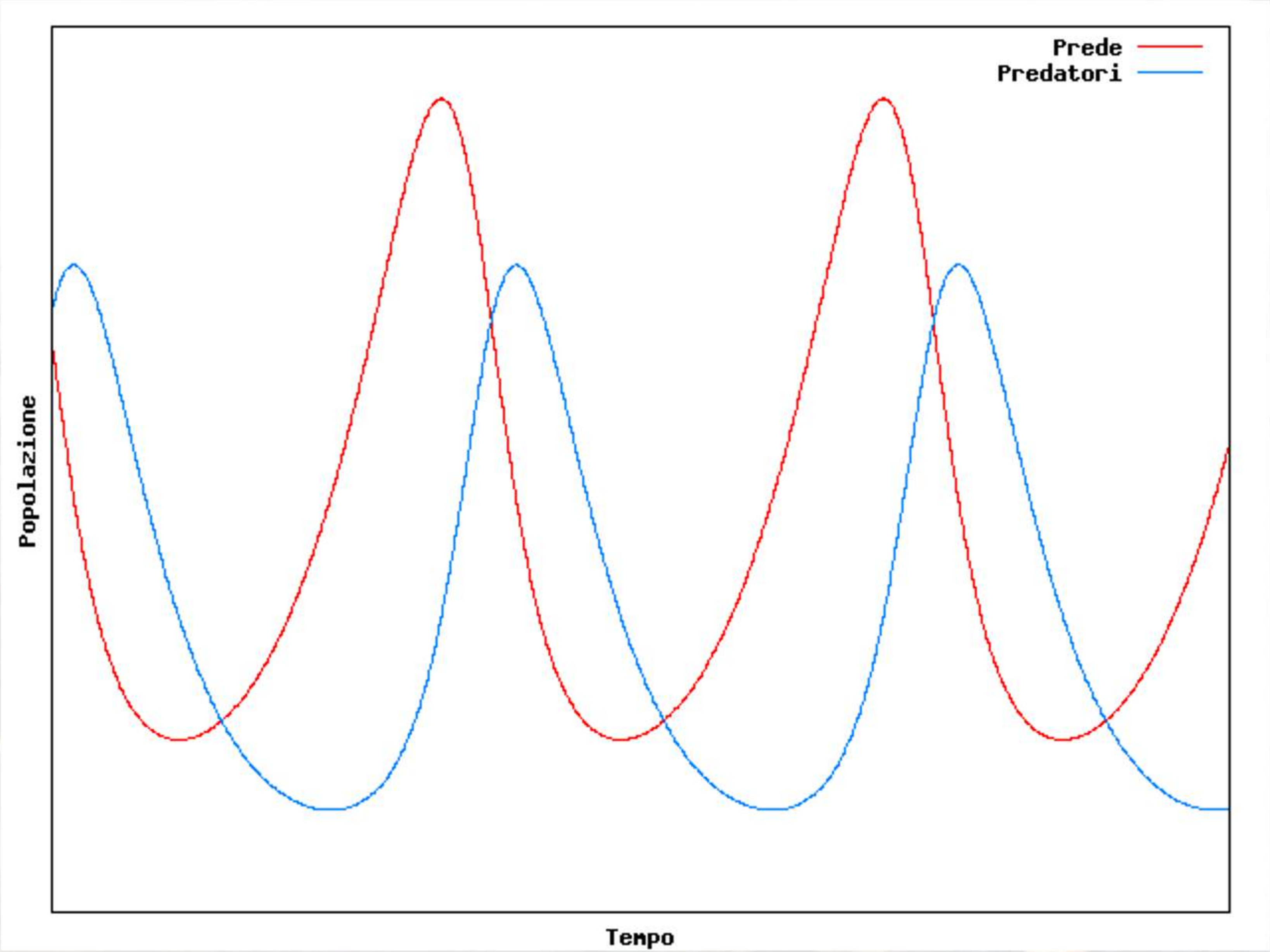
In questo caso la media del numero di prede e predatori rimane più o meno costante nel tempo.



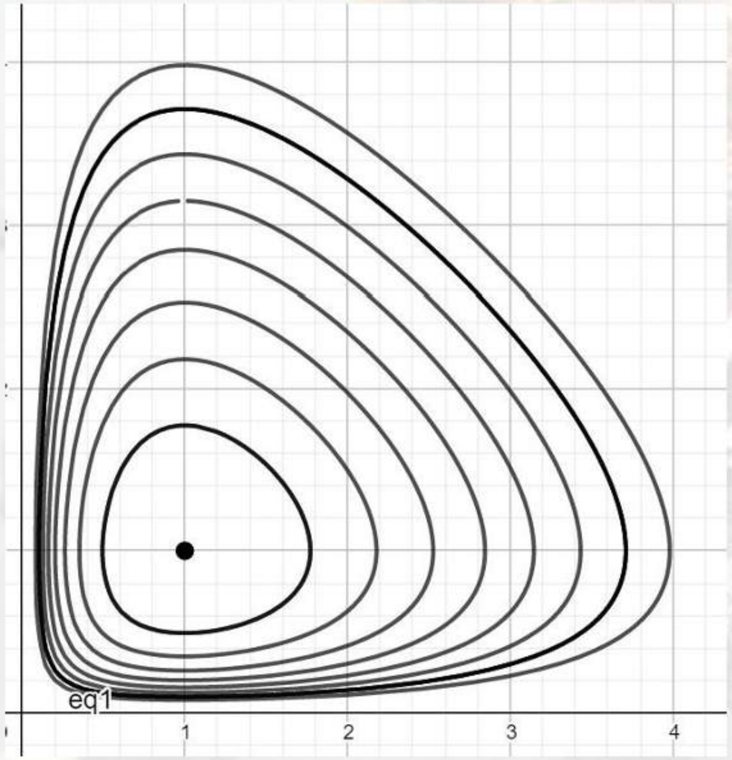
Posso rappresentare il variare di elementi delle due specie come un campo vettoriale su un piano cartesiano, dove l'asse y riporta il numero di predatori e l'asse x il numero di prede. Il punto $\left(\frac{c}{d};\frac{a}{b}\right)$ rappresenta la situazione di equilibrio



Osserviamo che date le **condizioni iniziali,** quindi il numero iniziale di membri di ciascuna specie, è possibile calcolare quanti membri ci saranno all’istante t. Inoltre si ha un **andamento ciclico** e dopo un tempo τ si saranno ripristinate le condizioni di partenza.



La funzione che definisce il numero di individui della specie è in entrambi i casi una **funzione periodica**.

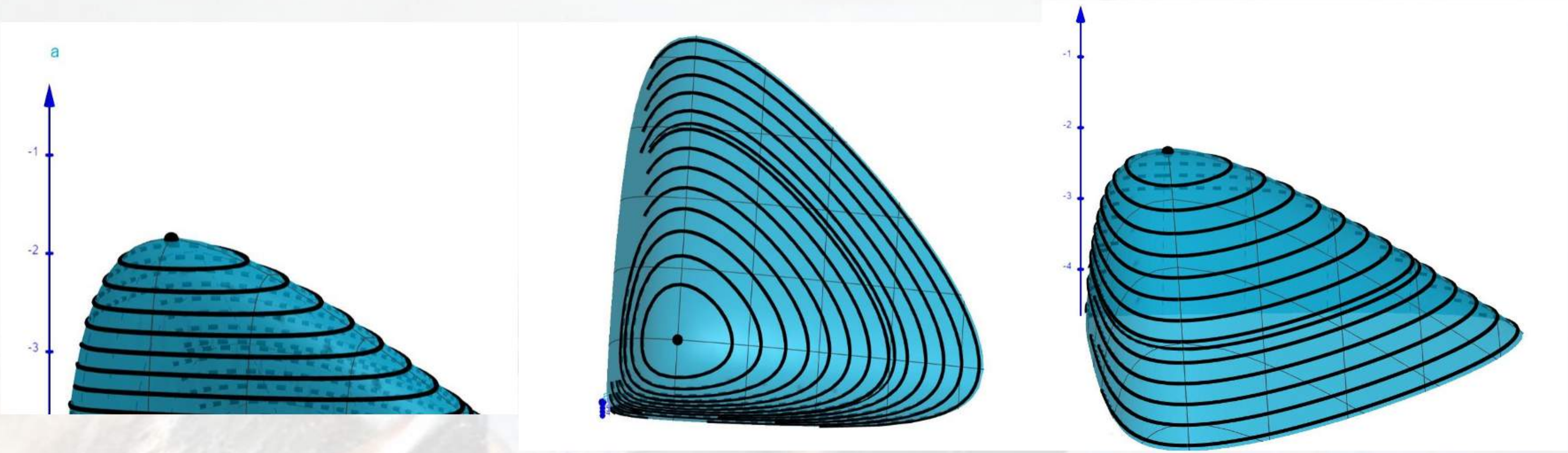


Integrando le equazioni precedenti si ottiene la funzione di due variabili

$$F(x, y) = a \cdot \ln y - b \cdot y + c \cdot \ln x - d \cdot x = k$$

Geometricamente rappresenta una superficie nello spazio $\mathbb{R}^3$

Questa funzione rappresenta la **costante del moto**, ovvero per ogni curva rimane costante, e per ottenere le diverse curve basta assegnare dei valori diversi a k, cioè imporre diverse condizioni iniziali

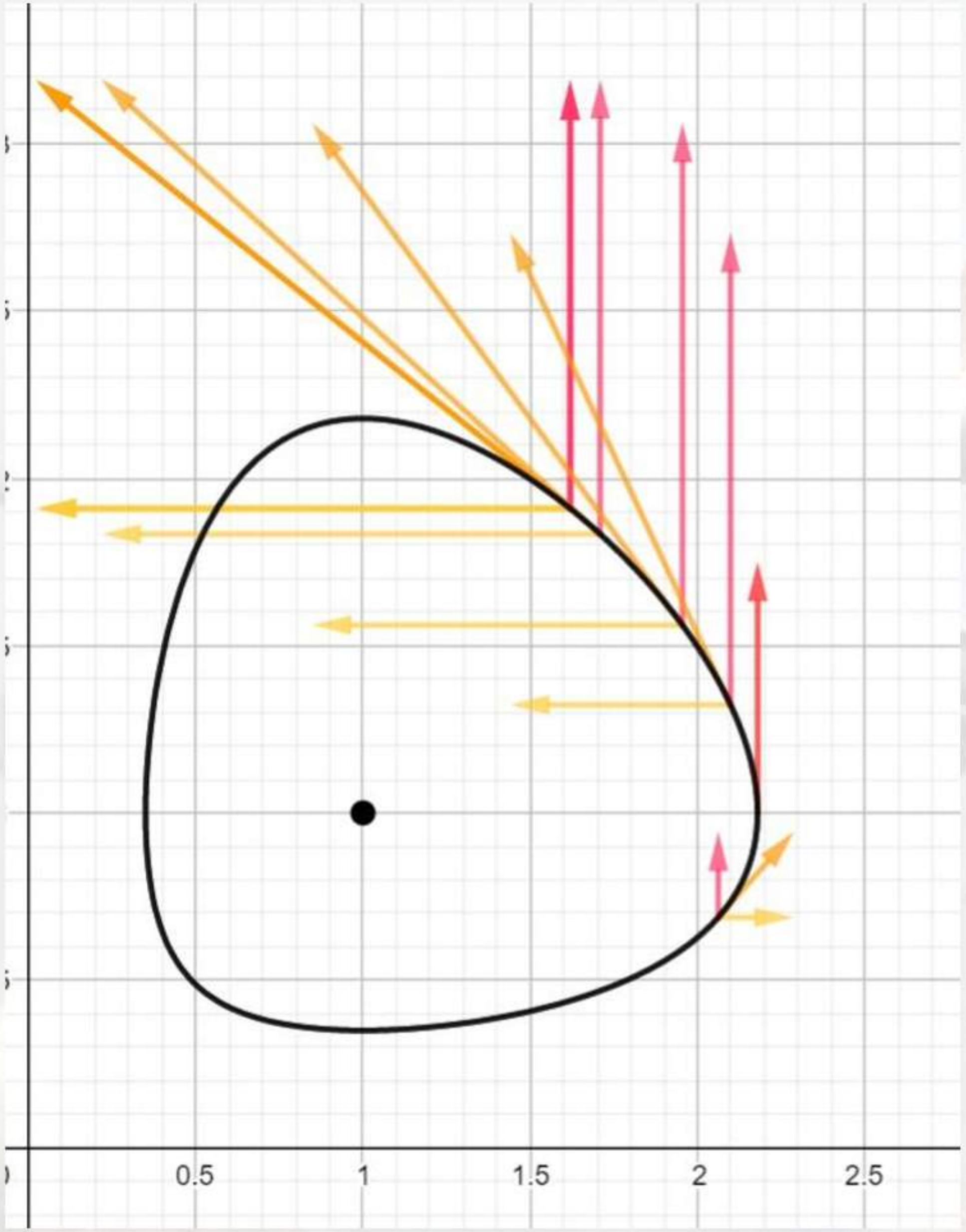


Il grafico della funzione $F(x, y)$ può essere rappresentato in 3D, dove x e y hanno lo stesso significato di prima e, intersecando la superficie con piani paralleli al piano xy (di equazione $z = k$) si ottengono delle **curve di livello**, che coincidono con le **traiettorie** rappresentate prima nel grafico sul piano. Il punto indicato sarebbe il punto stabile della funzione. Assegnando valori diversi a k, o più semplicemente cambiando le condizioni iniziali, si ottengono linee di livello diverse

Nella teoria dei sistemi dinamici, una **costante del moto** è una grandezza che resta invariata durante l'evoluzione del sistema. Dal punto di vista matematico si tratta dell'integrale primo dell'equazione del moto che descrive un sistema dinamico, cioè una funzione che rimane costante lungo le soluzioni di un problema differenziale.

Tornando al **moto armonico**, nel piano delle fasi (x, p) (posizione e quantità di moto) la costante del moto sarà l’energia meccanica, ovvero la somma tra energia potenziale elastica ed energia cinetica.

Le linee di livello in questo caso sono delle **ellissi**



Se disegniamo i vettori tangenti alla curva, che costituiscono il campo vettoriale di cui sopra, e li scomponiamo nelle loro componenti x e y otteniamo rispettivamente la velocità di crescita (o diminuzione) delle prede e quella dei predatori.

I vettori **gialli** che vanno verso destra indicano che in quel punto le prede stanno aumentando, mentre se vanno verso sinistra ne indicano la diminuzione, una regola analoga vale per i vettori **rossi** che rappresentano la variazione del numero di predatori nel tempo.

Volterra compendia in tre leggi le sue conclusioni

Leggi fondamentali delle fluttuazioni:

- Legge del ciclo periodico

Le fluttuazioni delle due specie sono periodiche e il periodo dipende dai fattori di crescita e decrescita (a, b, c, d) e dalle condizioni iniziali

- Legge della conservazione delle medie

Le medie dei numeri di individui per ogni specie sono costanti per ogni condizione iniziale a patto che i coefficienti non cambino nel tempo

- Legge della perturbazione delle medie

Se si cerca di distruggere uniformemente e proporzionalmente al loro numero gli individui delle due specie cresce la media del numero delle prede e diminuisce la media del numero dei predatori

Conclusione:

Il modello preda-predatore dimostra che le variazioni del numero di pesci erano dovute a soli motivi endogeni, cioè alla lotta per la sopravvivenza. Infatti la situazione anomala registrata da D'Ancona ricalca le equazioni che, seppur con molte approssimazioni, descrivono il rapporto tra i numeri di individui delle due specie.

L'utilità del modello preda-predatore

È stato utilizzato per lo studio delle epidemie e la risposta immunitaria di un organismo.

Oggi ci sono metodi diversi per studiare le interazioni tra specie conviventi, e in generale biosistemi, in cui si può tener conto di un maggior numero di variabili, ottenendo così modelli più realistici soprattutto grazie all'utilizzo della potenza di calcolo dei computer. Ciò non toglie che Volterra rappresenti una pietra miliare nella storia della biomatematica.

Volterra è considerato tuttora uno dei più grandi matematici italiani.
Fu uno dei 12 docenti universitari che si rifiutarono di prestare giuramento di fedeltà al fascismo, per questo perse la cattedra e decadde dall'Accademia dei Lincei

Bibliografia

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Boringhieri 1988
- L. Preziosi, *Modelli differenziali nelle scienze biomediche*, da La matematica, Vol. 4, Einaudi, 2010
- https://it.wikipedia.org/wiki/Vito_Volterra
- https://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Lotka-Volterra
- https://it.wikipedia.org/wiki/Costante_del_moto
- https://www.mathone.it/preda-predatore/
- http://www.federica.unina.it/smfn/metodi-e-modelli-matematici/modello-preda-predatore-di-lotka-volterra/

A cura di Elena Andreoletti 5D