Maturità scientifica 1992

Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti.

1. *Presi due vettori* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *non paralleli e con lo stesso punto di applicazione* O, *sia* $\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \vec{a}$ *e* $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. *Tracciare il vettore* $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ *e congiungere* O *con* C. *Il punto* P *divida il segmento* OC *in due parti tali che* $\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{PC}$. *Dimostrare che i punti* A, P *e* B *sono allineati (è allo scopo sufficiente dimostrare che i due vettori* $\overrightarrow{AP}$ *e* $\overrightarrow{PB}$ *sono multipli di uno stesso vettore).*
Posto $\vec{a} \perp \vec{b}$ *e* $|\vec{a}| = 1$ *e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro* O *con ascissa parallela ed equiversa ad* $\vec{a}$ *e ordinata parallela ed equiversa a* $\vec{b}$, *trovare* $|\vec{b}|$ *affinché i due segmenti* OC *e* AB *siano perpendicolari.*
Trovare, in questo caso, le due parabole con asse parallelo all'asse delle y *e passanti rispettivamente la prima per* O, P *ed* A *e la seconda per* B, P *e* C. *Verificare che le due parabole sono tra loro tangenti in* P. *Calcolare infine l'area della parte finita di piano racchiusa tra le due parabole e l'asse delle* y.

2. *La funzione* $f(x) = (2x^3 - 4x)e^{-x^2}$ *rappresenti, in opportune unità di misura, la forza* $f(x)$ *a cui è soggetto un punto* P *libero di muoversi lungo l'asse delle* x. *Sapendo che la forza* f *è data da*

$$f(x) = -\frac{dE(x)}{dx}$$

dove $E(x)$ *è l'energia potenziale, trovare la funzione* $E(x)$ *e rappresentarla avendo posto* $E(0) = -1$.
Per quali valori di x *il punto* P *è in equilibrio, ossia per quali valori di* x *la forza è nulla?*
Per tali valori di x *l'energia potenziale quale valore assume?*

3. *Data una circonferenza* γ *di raggio unitario e centro* O, *tracciare una semiretta* s *uscente da* O *e intersecante* γ *in un punto* Q. *Indicato con* P *un generico punto di* s *esterno alla circonferenza* γ, *tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano* A *e* B *i punti di tangenza. Indicata con* x *la lunghezza del segmento* PQ, *travare il limite per* x *tendente a infinito del rapporto*

$$k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$$

Studiare quindi la funzione $y = f(x)$, *dove* $f(x) = k^2$ *e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.*

Maturità scientifica P.N.I. 1992

1. *In un piano cartesiano ortogonale* Oxy *si considerino le parabole* C *e* C′ *di equazione rispettivamente:*

$$y - x^2 = 0 \quad e \quad y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$$

Si verifichi che C *e* C′ *sono tangenti in* A $(1,1)$ *e che hanno in comune un ulteriore punto* B.

a) *Detto* P *un punto della retta* AB, *sia* QQ′ *la corda intercettata da* C *sulla parallela per* P *all'asse delle ascisse,* RR′ *la corda intercettata da* C′ *sulla parallela per* P *all'asse delle ordinate e* S *la proiezione di* P *sulla retta* $y + 2 = 0$.
Si studi come varia il rapporto

$$\frac{8\overline{PS}^2}{\overline{QQ'} \cdot \overline{RR'}}$$

al variare di P, *determinando in particolare il suo valore minimo.*
Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle parabole C *e* C′.

b) *Detta* R *la regione finita di piano delimitata dalle due parabole, si conduca per* A *una retta* r *che incontra l'asse delle* y *in* S *e il contorno di* R, *oltre che in* A, *in un ulteriore punto* P. *Si consideri la funzione:*

$$f(m) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AS}}$$

essendo m *il coefficiente angolare della retta* r.

Si studi la funzione f(m) *determinandone in particolare il massimo relativo e il massimo assoluto.*

2. *In un piano ortogonale si indichino con* x *e* y *le coordinate di un punto* P *e con* X *e* Y *le coordinate di un punto* P′.
Si consideri la trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = a'x + b'y \end{cases}$$

tale che al punto A *di coordinate* $x = 1$, $y = 1$ *corrisponda il punto* A′ *di coordinate* $X = 0$, $Y = 2$ *e al punto* B *di coordinate* $x = 1$, $y = 0$ *corrisponda il punto* B′ *di coordinate* $X = 1$, $Y = 0$.
Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi.
Detto α *l'angolo acuto formato dalla retta* r *di equazione* $y = mx$ *e dalla sua trasformata* r′, *si studi come varia la tangente trigonometrica di* α *al variare della retta* r, *determinando in particolare il massimo relativo e il massimo assoluto di* tg α.

3. *Si desidera fondere due sequenze* A *e* B *di numeri interi, non ordinate e con eventuali valori ripetuti, in un'unica sequenza* C *nella quale compaiono, in ordine crescente e senza ripetizioni, i valori presenti in* A *e in* B.
Il candidato, formulate le eventuali ipotesi aggiuntive che ritiene necessarie, proponga e illustri una procedura per risolvere il problema e lo codifichi in un linguaggio di sua conoscenza.

Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti.

1. *La funzione* $f(x)$ *sia rappresentata*

$$\text{per } x \leq 1 \qquad \text{da } y = -3x^2 + Hx$$

$$\text{per } x > 1 \qquad \text{da } y = \frac{K}{x^2}$$

Determinare le costanti H *e* K *in modo che la funzione e la sua derivata siano continue in* $x = 1$. *Rappresentare la funzione così trovata e calcolarne l'integrale definito tra* 0 *e* $+\infty$.

2. *Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro* O, *tracciarne la circonferenza* γ *di raggio unitario e centro* O.
Detto A *il punto di coordinate* $(1, 0)$, *indicare con* ϑ *l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle* x *e con* P *il punto in cui tale semiretta interseca* γ $(P\widehat{O}A = \vartheta)$. *Determinare in funzione di* ϑ *l'ordinata* y *del punto* Q *appartenente al semiasse positivo delle* y *tale che* $\overline{PQ} = 2$.
Descrivere, limitandosi all'uso della derivata prima, la funzione $y = f(\vartheta)$ *trovata.*
Se P *ruota sulla circonferenza* γ *con velocità angolare costante, il moto di* Q *quali caratteristiche presenta?*
Negli istanti in cui Q *ha velocità nulla,* P *dove si trova?*

3. *Sia* $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

Esprimere y *in funzione di* x *e rappresentare tale funzione che si presenta sotto la forma* $y = \pm f(x)$.
Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato.
Calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata.
[L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $\sqrt{1 - x^2} = z$*].*

Il candidato deve svolgere due problemi, scelti tra quelli proposti.

1. *Si studi la funzione:*

$$f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

e si tracci, in piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, *la curva* C *di equazione* $y = f(x)$, *verificando che essa è simmetrica rispetto alla retta di equazione* $x = 1$.
Si determinino in particolare le equazioni $y = g_1(x)$ *e* $y = g_2(x)$ *degli asintoti di* C.
Si determini sull'asse delle ascisse l'intervallo I *di misura massima tale che, per ogni* $x \in I$, *l'errore assoluto che si commette, sostituendo a* $f(x)$ *il valore* $g_1(x)$ *o* $g_2(x)$, *sia maggiore di* $\frac{1}{10^k}$ (k *intero*).
Successivamente si descriva una procedura che consenta di calcolare gli estremi di tale intervallo e la si codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

2. *Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare* a *e* b *affinché il sistema di equazioni:*

$$\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + bz = 1 \end{cases}$$

ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione.
Interpretando a *e* b *come coordinate di un punto di un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oab, *si determini il luogo dei punti del piano soddisfacente alla condizione* $x_0 = 2y_0z_0$, *essendo* x_0, y_0, z_0 *la soluzione del sistema nel caso essa sia unica.*

3. *Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati* A, B *e* C *assumono la loro decisione indipendentemente.* A *e* B *hanno probabilità* $p\,(0 < p < 1)$ *di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato* C *decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta.*

a) Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto.
b) Supponendo di sostituire il giurato C *con un altro giurato* D *che ha probabilità* $p' \neq p\,(0 < p' < 1)$ *di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se* $p' > \frac{1}{2}$.
c) Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati, indipendentemente tra di loro, dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi:

$E_1 = \{$*la giuria composta da* A, B *e* C *ne assolve due su tre*$\}$;
$E_2 = \{$*la giuria composta da* A, B *e* D *ne assolve tre su tre*$\}$;
$E_3 = \{$*la giuria composta da* A, B *e* D *assolve almeno un imputato*$\}$.

In particolare per $p = \frac{3}{4}$ *si determini il valore di* p' *(probabilità che il giurato* D *decida per l'assoluzione) in modo che* $P(E_1) = P(E_2)$.

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

1. *Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* (Oxy), *è assegnata la curva* k *di equazione:* $y = \frac{x^2}{2} + \ln|x + 1|$

Disegnare un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi.
Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali.
Calcolare inoltre l'area della regione piana delimitata da k, *dall'asse* x *e dalla retta di equazione* $2x - 3 = 0$.
Stabilire infine quale delle due aree precedenti è la maggiore.

2. *Una piramide ha per base il triangolo* ABC, *isoscele e rettangolo in* A, *e ha per altezza il segmento* AV. *Inoltre la faccia* VBC *forma un angolo di* $45°$ *col piano della base e lo spigolo* VB *è lungo* $2h\sqrt{3}$, *dove* h *è una lunghezza nota.*
Calcolare la distanza del vertice A *dal piano della faccia* VBC *e trovare per quale valore di* h *tale distanza vale* $4\sqrt{2}$.
Verificato che questo valore di h *è* 4, *con riferimento a esso secare la piramide con un piano parallelo alla base* ABC *e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza* x.
Studiare, in rapporto alla questione geometrica, la funzione f(x) *ricavata e tracciarne l'andamento in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* (Oxy).
Calcolare infine quanti, fra i punti della regione piana compresa fra il grafico di f(x) *e l'asse* x, *escluso il contorno, hanno entrambe le coordinate intere.*

3. *Considerato un triangolo* ABC, *isoscele sulla base* BC, *indicare con* D *il piede della sua altezza condotta per* C *e costruire il triangolo* ECD, *isoscele sulla base* CD *e simile a quello dato, in modo che il punto* E *cada dalla stessa parte di* A *rispetto a* BC. *Sia:*

$$\overline{BC} = 4 \quad e \quad \overline{CD} = 2\sqrt{3}$$

a) Dimostrare che l'angolo $E\hat{C}B$ *è retto.*
b) Riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione della circonferenza k *passante per i punti* A, C, D.
c) Spiegare perché k *passa pure per* E.
d) Detto F *il punto in cui* k *seca ulteriormente* CB, *calcolare le aree delle due regioni piane in cui il minore degli archi* DF *di* k *divide il quadrilatero* ABCE.

Maturità scientifica P.N.I. 1994

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti.

1. *Si studi la funzione:*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$$

Si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, *il grafico della curva* C *di equazione* $y = f(x)$ *e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a* C *nei suoi punti* $(x, f(x))$, *per i quali* $f(x)$ *assume valore estremo relativo, e della tangente nel suo punto di flesso.*
Detta r *la parallela all'asse delle ascisse passante per il punto* P *d'intersezione della curva* C *con il proprio asintoto* a, *si determini il rapporto dei segmenti* QR *e* OP, *essendo* Q *e* R *le proiezioni su* a *degli ulteriori punti d'intersezione di* r *con* C.

2. *Si consideri la trasformazione* T *che muta i punti* $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ *di un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy, *rispettivamente nei punti* $A'(0, 1)$, $B'(2, -1)$, $C'(0, -1)$.
Si studi la natura di T *e si determinino gli elementi che restano uniti nella trasformazione e il rapporto tra le aree dei triangoli corrispondenti* ABC *e* $A'B'C'$.
Detta K *la circonferenza per i punti* A, B, C *e* P *la parabola di equazione* $y = -2x^2 + 1$, *si dimostri che i loro punti comuni sono vertici di un triangolo equilatero. Si considerino le figure* K' *e* P' *ottenute da* K *e* P *mediante la trasformazione* T *e la figura* Q' *ottenuta trasformando il quadrato* Q, *circoscritto a* K *e con i lati paralleli agli assi coordinati.*
Avvalendosi della trasformazione T *si dica la natura di* K', P' *e* Q' *e si determinino:*
a) le coordinate dei punti in cui Q' *è tangente a* K';
b) le coordinate dei punti d'intersezione di K' *e* P';
c) l'area delle tre regioni finite di piano delimitate da K' *e* P'.

3. *In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy *si considerino le linee di equazione:*

$$y = x^3 + x^2$$

e

$$y = -2x^2 + 1$$

Si dimostri che le due linee hanno un punto d'intersezione nel primo quadrante con ascissa x_0 *appartenente all'intervallo* $(0,4; 0,8)$.
Avvalendosi di un metodo numerico si determini x_0 *con un'approssimazione di* $\frac{1}{100}$.
Si descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di x_0 *con un'approssimazione di* 10^{-n} *e la si codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.*

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

1. *Considerato il triangolo equilatero* ABC, *chiamare:*
- C', C'' *i punti che dividono il lato* AB *in tre parti congruenti* ($AC' < AC''$);
- A', A'' *i punti che dividono il lato* AB *in tre parti congruenti* ($BA' < BA''$);
- B', B'' *i punti che dividono il lato* CA *in tre parti congruenti* ($CB' < CB''$).

Indicare quindi con:
- L *il punto intersezione dei segmenti* AA' *e* BB'';
- M *il punto intersezione dei segmenti* AA' *e* CC'';
- N *il punto intersezione dei segmenti* BB' *e* CC'';
- P *il punto intersezione dei segmenti* BB' *e* AA'';
- Q *il punto intersezione dei segmenti* CC' *e* AA'';
- R *il punto intersezione dei segmenti* CC' *e* BB''.

a) Dimostrare, con il metodo che si preferisce, che l'area dell'esagono LMNPQR *è* $\frac{1}{10}$ *di quella del triangolo* ABC.

b) Ammesso che l'area di tale esagono sia:

$$\frac{9}{10} h^2 \sqrt{3},$$

dove h *è una lunghezza assegnata, calcolare il volume del solido generato dall'esagono quando ruota di mezzo giro intorno alla retta* NR.

c) Supponendo nota la formula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

che fornisce il volume di un solido di rotazione, dimostrare le formule dei volumi di un cono e di un tronco di cono circolari retti.

2. *Nel cubo di vertici,* A, B, C, D, E, F, G, H *le facce* ABCD *e* EFGH *sono opposte e i segmenti* AE, BF, CG *sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria.*
Sullo spigolo BF *prendere un punto* P *tale che:*

$$\overline{BP} = x.$$

a) Verificare che la distanza y *di* P dalla diagonale AG *è espressa dalla seguente funzione:*

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)}.$$

b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), *dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti.*

c) Considerato infine il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x, *dalla regione piana delimitata da tale grafico, dagli assi di* *riferimento e dalla retta di equazione* $x = h$ (*con* $h > 0$), *calcolare per quale valore di* h *questo volume è* $\frac{16}{9}\pi$.

3. *In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva* K *di equazione:*

$$y = \sin x + \frac{1}{4 \sin x}, \quad con \quad -\pi < x < \pi.$$

a) Disegnarne l'andamento e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi.
b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da K *e dalla retta di equazione* $y = 1$.
Nota. *Per il calcolo di una primitiva della funzione* $\frac{1}{\sin x}$ *si suggerisce di porre* $tang \frac{x}{2} = t$.

Maturità scientifica P.N.I. 1995

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti.

1. *In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto* $A_0(1, 0)$. *Si costruisca il triangolo rettangolo* OA_0A_1 *avente il vertice* A_1 *sull'asse delle ordinate e sia* α *l'angolo* $O\hat{A}_0A_1$. *Si conduca per* A_1 *la perpendicolare alla retta* A_0A_1 *che incontra l'asse delle ascisse in* A_2; *si conduca per* A_2 *la perpendicolare alla retta* A_1A_2 *che incontra l'asse delle ordinate in* A_3 *e così via, ottenendo una spezzata* $A_0A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ *i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse.*
Il candidato:
a) dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza l_n *della spezzata (la somma dei primi* n *termini di una progressione geometrica di primo termine* a_0 *e ragione* q *è* $S_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$);
b) determini il limite di l_n *al tendere di* n *all'infinito distinguendo i due casi:*

$$1)\ \alpha < \frac{\pi}{4} \qquad 2)\ \alpha \geq \frac{\pi}{4}$$

e verificando che nel caso 1) detto limite assume valore finito $l(\alpha)$;
c) studi in detto caso, come varia $l(\alpha)$ *al variare di* α;
d) descriva una procedura che, con riferimento alla definizione di progressione geometrica, consenta di calcolare la lunghezza l_n *della spezzata* $A_0A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ *e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.*

2. *In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy *si consideri la parabola* Γ *di equazione* $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ *e sia* P *il punto di* Γ *di ascissa* λ.

Il candidato:

a) scriva l'equazione della parabola passante per l'origine O *e avente il vertice nel punto* P*;*
b) determini l'equazione della curva Σ*, luogo geometrico del fuoco della parabola al variare di* λ*;*
c) tracci il grafico della curva Σ *individuandone in particolare il flesso* F*;*
d) detta r *la retta per* F *e per il punto* A*, di ascissa* -1*, della curva* Σ*, calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da* Σ *e* r*;*
e) dica l'errore relativo che si commette assumendo come area di detta regione quella del triangolo inscritto OFA.

3. *Nella tabella seguente sono riportati i dati di un'indagine campionaria, relativamente ad alcune regioni e al 1990, sulla distribuzione delle abitazioni secondo la superficie abitata (area espressa in metri quadrati):*

Superficie / Regione	50-95 mq	96-110 mq	111-130 mq	131-200 mq
Liguria	130	11	6	5
Campania	362	1805	105	122
Sicilia	1068	430	203	149

Il candidato:

a) stimi la superficie media abitata nelle tre regioni e la deviazione standard delle stime, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio;
b) rappresenti mediante diagrammi opportuni le distribuzioni marginali, rispettivamente per regioni e per superficie;
c) verifichi l'ipotesi:
H^0*: non c'è differenza significativa (5%) tra le medie delle superfici nelle diverse regioni;*
d) verifichi l'ipotesi:
H^0*: non c'è differenza significativa (5%) tra le distribuzioni relative alle diverse regioni.*

1. *In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* (Oxy), *sono assegnate le parabole di equazione:*

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2$$

dove a *è un numero reale positivo.*

Tra di esse determinare la parabola p *che, con la sua simmetrica* q *rispetto all'origine* O, *delimita una regione di area* $\frac{128}{3}$.
Constatato che per la parabola p *risulta* $a = 2$, *calcolare l'area del quadrilatero convesso individuato dagli assi di riferimento e dalle tangenti alle due parabole* p, q *nel loro punto comune di ascissa positiva.*
Considerato infine il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero precedente, dimostrare che si tratta di una parallelogramma e calcolarne l'area.

2. *In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* (Oxy), *è assegnata la curva* k *di equazione*

$$y = \frac{x^2}{4 - x^3}$$

Dopo avere studiato la funzione $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^3}$ *(dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di* k*), disegnare l'andamento di* k.
Indicata con t *la tangente a* k *parallela all'asse delle ascisse distinta dall'asse stesso, calcolare l'area della regione piana delimitata da* k *e da* t.
A completamento del problema, prendere in esame le due seguenti proposizioni.

a) Una funzione reale di variabile reale non derivabile in un punto non è continua in quel punto.
b) Una funzione reale di variabile reale non continua in un punto non è derivabile in quel punto.

Dire se ciascuna è vera o falsa e fornire una esauriente giustificazione della risposta.

3. *Considerato il rettangolo* ABCD *il cui lato* AD *è lungo* 8a, *dove* a *è una lunghezza nota, sia* M *il punto medio del lato* AB. *Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta per* M, *prendere un punto* V *in modo che il piano del triangolo* VCD *formi col piano del rettangolo un angolo* α *tale che* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.
Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice V *e base* ABCD *è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è* $92a^2$, *calcolare la lunghezza di* AB.
Constatato che tale lunghezza è 5a, *condurre un piano* σ *parallelo alla base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il poligono sezione di* σ *con la piramide stessa, ottenendo in questo modo un prisma retto. Determinare la posizione di* σ *per la quale il volume di tale prisma risulta massimo.*
A completamento del problema, dimostrare che se i numeri reali positivi x, y *variano in modo che la loro somma si mantenga costante, allora il prodotto* x^2y *è massimo quando risulta* $x = 2y$.

Maturità scientifica P.N.I. 1996

1. *In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* (Oxy), *sono assegnati i punti* $A(2, 0)$ *e* $B(0, 4)$. *Sia* $P(x, y)$ *un punto di detto piano con* $x > 0$ *e* $y > 0$ *e* C, D, E, F *i punti medi dei lati* OA, AP, PB, BO *del quadrilatero* OAPB.
Il candidato:

a) *dica quali posizioni deve occupare* P *affinché il quadrilatero* OAPB *degeneri in un triangolo;*
b) *dimostri che il quadrilatero* CDEF *è un parallelogrammo;*
c) *dica quali posizioni deve occupare* P *affinché il parallelogrammo* CDEF *sia un rettangolo;*
d) *dica quali posizioni deve occupare* P *affinché il parallelogrammo* CDEF *sia un rombo;*
e) *dica dove si trova* P *quando il parallelogrammo* CDEF *è un quadrato e ne determini le coordinate;*
f) *dimostri che l'area del parallelogrammo* CDEF *è metà dell'area del quadrilatero* OAPB*;*
g) *esprima in funzione dell'ascissa di* P *il rapporto* z *tra l'area del quadrato di lato* EF *e l'area del parallelogrammo* CDEF, *quando* P, *oltre a rispettare le condizioni inizialmente assegnate, appartiene alla retta di equazione* $y = 4 - x$*;*
h) *studi la funzione* $z(x)$ *e ne disegni il grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* O'xz.

2. *In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy *è assegnata la parabola di equazione*

$$y = -x^2 + 2x + 3.$$

Sia $P(x, y)$ *un punto dell'arco* γ, *appartenente al primo quadrante, di detta parabola, e* H *la proiezione di* P *sull'asse delle ascisse.*
Sul piano α *passante per il punto* P *e perpendicolare all'asse delle ascisse, si consideri il triangolo* APB, *avente i lati* AP *e* PB *uguali, il segmento* PH *come altezza relativa al lato* AB, *e tale che la somma delle lunghezze di* AB *e di* PH *sia* 4.
Il candidato:

a) *dica quali posizioni deve occupare* P *sull'arco considerato affinché il triangolo* APB *esista;*
b) *limitatamente alle suddette posizioni di* P, *esprima l'area* S *del triangolo* APB *in funzione dell'ascissa di* P *e studi come essa varia al variare di* P*;*
c) *calcoli il volume del solido, luogo del triangolo* APB *al variare di* P *sull'arco* γ*;*
d) *risponda alle domande a) e b) quando* P *varia sull'arco* γ' *della parabola considerata, appartenente al semipiano* $x \geq 0$, *verificando in particolare se esistono estremi relativi e assoluti di* $S(x)$ *ed eventualmente determinandoli.*

3. *Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco: Paolo colpisce il bersaglio nel* 75% *dei casi, Giovanni nell'*80%.

Decidono di fare una gara osservando le seguenti regole:

- *lanceranno una moneta per decidere chi tirerà per primo: se esce testa sarà Paolo, se esce croce sarà Giovanni;*
- *tireranno a turno e vincerà chi per primo farà centro.*

Il candidato:

a) *calcoli la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro;*
b) *calcoli la probabilità che Paolo vinca entro il quarto tiro;*
c) *se in un certo tiro fissato, per esempio il quindicesimo, si ottiene centro per la prima volta, calcoli la probabilità che a tirare sia stato Paolo;*
d) *descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità che Paolo vinca all'ennesimo lancio se a iniziare è stato Giovanni, e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.*

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

1. *In un piano sono assegnate una circonferenza* k *di raggio di lunghezza nota* r *e una parabola* p *che seca* k *nei punti* A *e* B *e passa per il suo centro* C. *Inoltre l'asse di simmetria della parabola è perpendicolare alla retta* AC *e la corda* AB *è lunga quanto il lato del triangolo equilatero inscritto in* k.
Dopo aver riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy)*:*

a) determinare l'equazione della parabola p*;*
b) calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno alla retta AC*, dalla regione piana delimitata dai segmenti di rette* AB *e* AC *e dall'arco* BC *della parabola* p*;*
c) considerata la retta t*, tangente alla parabola* p *e parallela alla retta* AB*, trovare la distanza delle rette* t *e* AB*;*
d) dopo aver dimostrato analiticamente che p *e* k *non hanno altri punti comuni oltre ad* A *e* B*, calcolare le aree delle regioni piane in cui* p *divide il cerchio delimitato da* k.

2. *Sono assegnate le funzioni in* x*:*

$$\frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1}$$

dove a, b *sono parametri reali.*

a) Fra tali funzioni indicare con $f(x)$ *quella per cui la curva* k *di equazione* $y = f(x)$*, disegnata in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* (Oxy)*, soddisfi alle seguenti condizioni:*
- *la retta di equazione* $y = 1$ *sechi* k *in due punti e sia tangente a essa in un punto;*
- *l'asse* x *sia tangente a* k *in due punti distinti.*

b) Disegnare l'andamento di k.
c) Calcolare l'area della regione piana delimitata da k *e dall'asse* x.
d) Calcolare:

$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx.$$

3. *Considerare i coni circolari retti in cui è uguale a una lunghezza assegnata la somma del doppio dell'altezza col diametro della base.*
Fra tali coni determinare quello di volume massimo e stabilire se ha anche la massima area laterale.
Nel cono di volume massimo inscrivere poi il cilindro circolare retto avente la base sul piano di base del cono e volume massimo.
A completamento del problema, considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$*, definita in un intervallo* I*, e detta* $f(x)$ *decrescente in* I *se* $x' < x''$ *implica* $f(x') > f(x'')$ *per ogni* x', x''*, dimostrare il seguente teorema:*
sia $f(x)$ *una funzione reale di variabile reale derivabile in un intervallo* I. *Condizione sufficiente ma non necessaria affinché* $f(x)$ *sia decrescente in* I *è che risulti* $f'(x) < 0$ *per ogni* x *appartenente a* I.

1. *In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy *sia data la parabola* γ *di equazione* $y = x^2$ *e sia* P *un suo punto di ascissa* $\lambda \neq 0$ *e* r *la parallela per* P *all'asse* y.
Siano γ_1 *e* γ_2 *le parabole con asse la retta* r, *vertice in* P *e stessa distanza focale di* γ *(distanza fuoco-direttrice, pari a* $\frac{1}{2|a|}$ *per la parabola di equazione* $y = ax^2 + bx + c$*).*

Il candidato:

a) *scriva in funzione di* λ *le equazioni di* γ_1 *e* γ_2*, essendo* γ_1 *la parabola che incontra* γ *solo in* P*;*
b) *scriva le equazioni delle trasformazioni che mutano* γ *in* γ_1 *e* γ *in* γ_2*;*
c) *dica la natura di dette trasformazioni precisando se si tratta di trasformazioni dirette o inverse e se hanno elementi che si trasformano in se stessi;*
d) *fissato* $\lambda = 1$ *e dette* T, T_1, T_2 *le rispettive intersezioni di* γ, γ_1 *e* γ_2 *con la retta di equazione* $x - h = 0$*, studi la funzione* $z = \frac{TT_1 + T_1T_2}{TT_2}$*, al variare di* h*, e ne tracci il relativo grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* O'hz.

2. *In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy *sia* r *la retta di equazione* $x - 1 = 0$ *e* P *un suo punto. Siano* A *e* B *i punti d'intersezione della retta* OP *con la circonferenza di centro* P *e raggio* $2\sqrt{2}$.
Il candidato:

a) *verifichi che il luogo di* A *e* B*, al variare del punto* P *su* r*, è dato dalle curve* γ_1 *e* γ_2*, rispettivamente di equazione* $y = f_1(x)$ *e* $y = f_2(x)$*, essendo:*

$$f_1 = +\frac{x}{x-1}\sqrt{7 + 2x - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\frac{x}{x-1}\sqrt{7 + 2x - x^2}$$

b) *determini l'insieme* E *di esistenza della funzione* $f_1(x)$*, gli insiemi in cui essa assume valore positivo, negativo o nullo, gli eventuali asintoti, il valore* x_0 *in cui ha un massimo relativo, e dimostri che le tangenti a* γ_1 *nei punti le cui ascisse sono gli estremi di* E *nei quali* $f_1(x)$ *è definita, sono parallele all'asse* y*;*
c) *disegni la curva* γ_1 *e, quindi, la curva* γ_2*;*
d) *detta* t *la tangente alla curva* γ_1*, nel suo punto* $M(x_0, f(x_0))$ *determini l'ulteriore intersezione di* t *con* γ_1*;*
e) *detta* S *l'area della regione finita di piano compresa tra* γ_1*, l'asse* x *e la parallela all'asse* y *per il punto* M*, descriva una procedura che consenta di calcolare, mediante un metodo d'integrazione numerica a sua scelta, i valori approssimati di* S *e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.*

3. *Si consideri in un piano* α *un rettangolo* ABCD *i cui lati* BC *e* AB *misurano rispettivamente* a *e* 2a. *Sia* AEF*, con* $E \in AB$ *e* $F \in CD$*, un triangolo isoscele la cui base* AE *ha misura* 2r.
Il candidato:

a) *dimostri che una retta* s *parallela ad* AB*, a distanza* x *da essa, interseca i triangoli* AEF *e* AEC *secondo segmenti uguali;*
b) *detta* C_1 *la circonferenza di diametro* AE *e appartenente al piano* γ *passante per* AB *e perpendicolare ad* α*, e detti* T_1 *e* T_2 *i coni di base* C_1 *e vertici rispettivamente nei punti* F *e* C*, dimostri che le sezioni* C'_1 *e* C'_2 *di detti coni con il piano* γ'*, passante per la retta* s *e parallelo al piano* γ*, sono circonferenze;*
c) *determini i volumi dei coni* T_1 *e* T_2*;*
d) *determini, per via sintetica o analitica, il valore di* x *per il quale* C'_1 *e* C'_2 *sono tangenti esternamente.*

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti.

1. *In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy *sono dati i punti* $A(-1,0)$ *e* $B(1,0)$.
Il candidato:

a) *scriva l'equazione di* Γ_1, *luogo dei punti per cui è uguale a* $2\sqrt{2}$ *la somma delle distanze da* A *e da* B, *e l'equazione di* Γ_2, *luogo dei punti per cui è uguale a* $\sqrt{2}$ *la distanza da* B;
b) *verifichi che* Γ_1 *e* Γ_2 *hanno due punti* C *e* D *in comune e dimostri che* CBD *è un triangolo rettangolo;*
c) *determini, eventualmente sfruttando la simmetria della curva* Γ_1 *rispetto all'asse delle ordinate l'area della regione finita di piano* S *delimitata dagli archi di* Γ_1 *e di* Γ_2 *appartenenti al semipiano di equazione* $y \geq 0$ *e dai segmenti* VW *e* V'W', *essendo* V,V' *e* W,W' *i punti d'intersezione dell'asse delle ascisse rispettivamente con* Γ_1 *e con* Γ_2 (V *e* W *di ascissa positiva);*
d) *considerato il solido T che si ottiene facendo ruotare* S *di un giro completo attorno all'asse delle ascisse, scriva la funzione* $f(x)$ *che esprime l'area della sezione di* T *con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per il punto* $P(x,0)$, *distinguendo le varie posizioni di* P, *e disegni la curva* A *di equazione* $y = f(x)$;
e) *dica cosa rappresenta per il solido* T *l'area della parte di piano compresa tra* A *e l'asse delle ascisse.*

2. *Sia dato il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2ky - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases}$$

Il candidato:
a) *dica per quali valori di* h *e* k *il sistema ammette soluzioni;*
b) *interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette* r, s, t *di un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* Oxy, *dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione;*
c) *nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo;*
d) *in tale condizione, fissato* $h = 1$, *studi come varia l'area* s *del triangolo al variare di* k *e disegni, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali* O'ks, *la curva di equazione* $s = s(k)$.

3. *Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 metri e il diametro della sezione di 4 centimetri. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno una lunghezza aleatoria con distribuzione normale di media* $m_1 = 5$ *m e scarto standard* $\sigma_1 = 4$ *cm. Il diametro della sezione è una variabile aleatoria, indipendente dalla precedente, e con distribuzione normale di media* $m_2 = 4$ *cm e scarto standard* $\sigma_2 = 0{,}8$ *cm.*
Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra 4,95 m e 5,05 m e la sua sezione tra 2,8 cm e 5,2 cm.
La tavola della funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata è, per alcuni valori, la seguente:

Ascissa: x	F(x)
– 1,50	0,067
– 1,45	0,074
– 1,35	0,089
– 1,25	0,106

N° 034932/ 99

Sessione ordinaria 1999

Seconda prova scritta

06798.2.1/1

Ministero della Pubblica Istruzione

M557 – ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

1. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto x_0.

a) Dire se la condizione $f'(x_0) = 0$ è:

- necessaria ma non sufficiente,
- sufficiente ma non necessaria,
- necessaria e sufficiente

per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto x_0. Fornire una esauriente dimostrazione della risposta.

b) Posto $f(x) = \dfrac{x^3}{ax+b}$, dove a, b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva γ di equazione cartesiana $y = f(x)$ abbia un estremo relativo nel punto di coordinate $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{27}{32}\right)$.

c) Controllato che la curva γ cercata si ottiene per $a = 2$, studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

d) Nello stesso piano (Oxy) disegnare l'andamento della curva γ' di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato, in particolare, le coordinate dei punti comuni a γ e γ'.

e) Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ'. Quale?

2. In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r ed una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro di k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento AB. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento AB è $\dfrac{8}{3}r^2$.

Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della circonferenza k;

b) determinare l'equazione della parabola p;

c) trovare le coordinate dei punti comuni a k e p;

d) calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k;

e) stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a $\dfrac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^2$.

Sessione ordinaria 1999
Seconda prova scritta
06798.2.1/1

Ministero della Pubblica Istruzione

M557 – ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

3. Considerato il quadrato ABCD, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri 2x radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

a) Esprimere in funzione di x il rapporto:

$$f(x) = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}}$$

b) Studiare la funzione f(x) ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnarne il grafico in un piano cartesiano ai fini della risoluzione del punto c).

c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale k assegnato.

d) Verificare che il rapporto f(x) può essere scritto nella seguente forma:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 1}.$$

e) Stabilire che risulta:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

Durata massima della prova: 5 ore.
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.