TRASFORMAZIONI LINEARI SUL PIANO

Sono trasformazioni lineari tutte le trasformazioni del tipo:

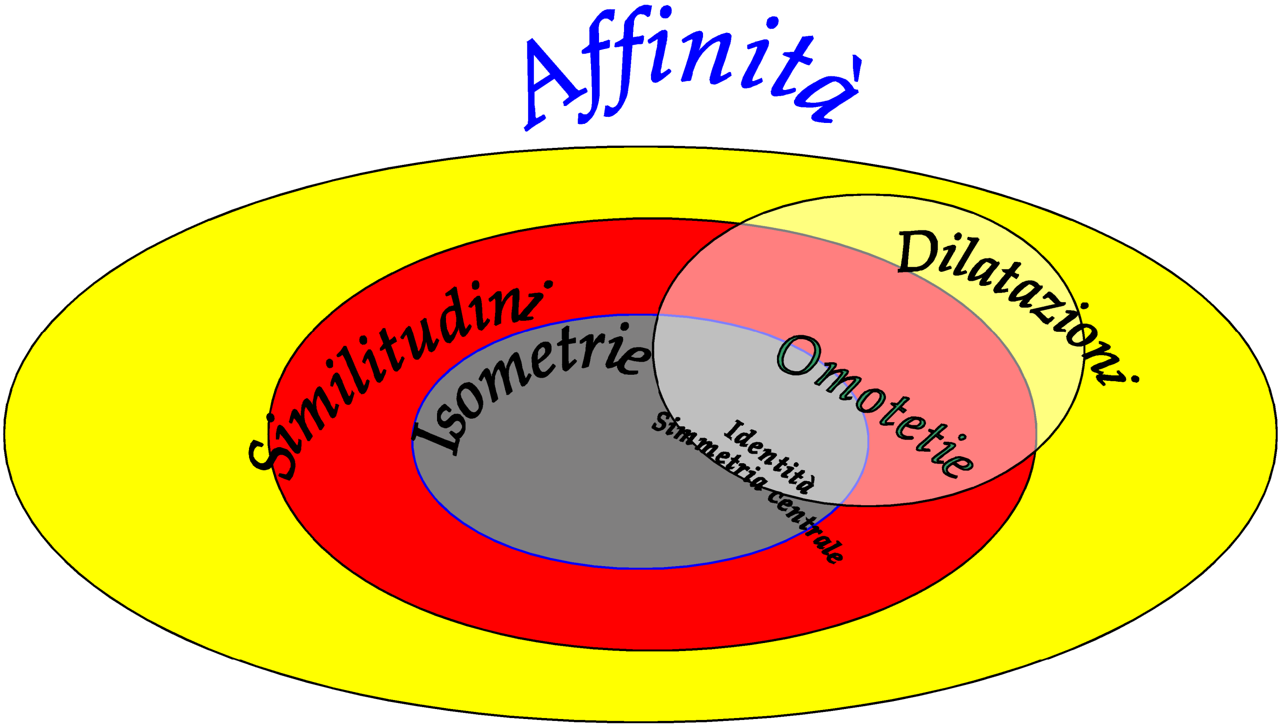
$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$ in forma matriciale: X' = A X + B , cioè $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$

Dove $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è la matrice della trasformazione.

Se il det A = ad - bc è diverso da zero, la trasformazione è invertibile e quindi biunivoca; in tal caso la trasformazione è detta "**affinità**". La sua inversa è A^{-1} tale che: $A^{-1} \circ A = A \circ A^{-1} = I$.
Se det A > 0 si dice che l'affinità è diretta o positiva.
Se det A < 0, si dice che l'affinità è inversa o negativa.
La affinità formano gruppo e comprendono come casi particolari altre trasformazioni, come da schema qui rappresentato.

Le principali proprietà dell'affinità sono:

- Il modulo del determinante della matrice di trasformazione rappresenta il rapporto tra le aree di figure corrispondenti nell'affinità, rapporto che è pertanto costante e che viene detto "rapporto di affinità": $|ad - bc| = \frac{S'}{S} = k$.
- Una affinità trasforma una retta in una retta.
- Una affinità conserva il parallelismo.
- Una affinità conserva il punto medio di segmenti.
- Una affinità trasforma rette incidenti in rette incidenti (ma non conserva gli angoli).



<u>Affinità diretta</u>

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$$

<u>Affinità inversa</u>

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$$

<u>Elementi uniti</u>

Si dice elemento unito in una trasformazione un elemento che coincide con il suo trasformato.
Si danno vari casi:

- non ci sono punti uniti (ad esempio nella traslazione nessun punto si trasforma in se stesso)
- vi è un punto unito, detto centro dell'affinità (ad esempio il centro di una simmetria centrale)
- vi sono due punti uniti; in tal caso si può dimostrare che vi sono infiniti punti uniti, cioè vi è una retta unita che è la retta passante per i due punti.
  La retta può risultare *puntualmente invariante* (ogni punto si trasforma in se stesso: per esempio l'asse di una simmetria assiale) oppure *globalmente invariante* (la retta si trasforma in se stessa, ma ogni punto si trasforma in un altro punto: per esempio una retta in una traslazione di vettore parallelo alla retta).

Se il centro dell'affinità è l'origine degli assi le equazioni dell'affinità diventano:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Se $|ad - bc|$ =1, l'affinità è una "equivalenza", cioè conserva le aree.

SIMILITUDINI

Le similitudini sono particolari affinità tali che trasformano una circonferenza in una circonferenza.
E' facile dimostrare che, affinché ciò accada, devono valere le relazioni:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

quindi le equazioni di una similitudine diretta saranno del tipo:

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = -bx + ay + q \end{cases}$$

dove $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ è il rapporto di similitudine,

cioè il rapporto tra le lunghezze di segmenti corrispondenti.

Se $\det A = a^2 + b^2 > 0$, la similitudine è diretta.
Se $\det A = -(a^2 + b^2) < 0$, la similitudine è inversa.
La similitudine, come noto, conserva gli angoli.

Similitudine diretta

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = 3x + 2y + 2 \end{cases}$$

Similitudine inversa

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 3x - 2y + 2 \end{cases}$$

Teorema: ogni similitudine diretta, che non sia una traslazione, è composta da una rotazione di centro O, da una traslazione e da una omotetia di centro O. Si può allora scrivere:

$$\begin{cases} x' = k(x\cos\alpha - ysen\alpha) + p \\ y' = k(xsen\alpha + y\cos\alpha) + q \end{cases}$$ similitudine diretta

Teorema: ogni similitudine inversa è composta da una rotazione di centro O, da una simmetria rispetto all'asse y, una traslazione e una omotetia di centro O. Si può allora scrivere:

$$\begin{cases} x' = k(x\cos\alpha + ysen\alpha) + p \\ y' = k(xsen\alpha - y\cos\alpha) + q \end{cases}$$ similitudine inversa

Teorema: la composizione di due similitudini dirette è una similitudine diretta, il cui rapporto di similitudine è uguale al prodotto dei due rapporti delle similitudini componenti.

Teorema: la composizione di due similitudini indirette è una similitudine diretta, il cui rapporto di similitudine è uguale al prodotto dei due rapporti delle similitudini componenti.

DILATAZIONI

La dilatazione è una particolare affinità della forma:

$$\begin{cases} x' = hx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$ con $h \neq k$ in generale.

Se hk>0, la dilatazione è diretta, se hk < 0, la dilatazione è inversa.

Dilatazione diretta

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 3y + 2 \end{cases}$$

Dilatazione indiretta

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$$

OMOTETIE

Se una dilatazione è anche una similitudine, essa è detta omotetia.

$$\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$ omotetia di centro il punto unito C $\left(\frac{p}{1-k};\frac{q}{1-k}\right)$

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$ omotetia di centro O

$|k|$ è il rapporto di omotetia (similitudine), cioè il rapporto tra lunghezze di segmenti corrispondenti.

Il determinante dell'omotetia è sempre k^2 >0; quindi l'omotetia è sempre una affinità diretta.
Si fa comunque la seguente distinzione.
Se k>0, l'omotetia si dice omotetia diretta in quanto: punti e loro corrispondenti appartengono alla stessa semiretta di origine C.
Se k<0, l'omotetia è detta omotetia inversa in quanto: punti e loro corrispondenti appartengono a semirette opposte rispetto al punto C.
Se k > 1, si avrà una dilatazione delle figure, se k è in modulo <1, si avrà una riduzione.
Se k = 1, si ottiene una traslazione (in particolare l'identità, se p = q = 0).
Se k = -1, si ottiene una simmetria centrale (in particolare la simmetria di centro O, se p = q = 0).

<u>Omotetia diretta</u>

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}$$

<u>Omotetia inversa</u>

$$\begin{cases} x' = -2x + 1 \\ y' = -2y + 2 \end{cases}$$

ISOMETRIE

Le isometrie sono similitudini di rapporto $k = \pm 1$.
L'equazione generale di una isometria sarà:

$$\begin{cases} x' = (x\cos\alpha - y sen\alpha) + p \\ y' = (x sen\alpha + y\cos\alpha) + q \end{cases}$$

isometria diretta, det = 1

$$\begin{cases} x' = (x\cos\alpha + y sen\alpha) + p \\ y' = (x sen\alpha - y\cos\alpha) + q \end{cases}$$

isometria inversa, det = -1

Particolari <u>isometrie dirette</u> sono:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y sen\alpha \\ y' = x sen\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

rotazione di centro l'origine

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0) sen\alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0) sen\alpha + (y - y_0)\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

rotazione di centro il punto (x_0, y_0)

(La trasformazione inversa è la rotazione di angolo – α, che, come facilmente verificabile, ha ancora determinante = 1)

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

traslazione (α = 0°)

$$\begin{cases} x' = -x + p \\ y' = -y + q \end{cases}$$

simmetria centrale (α = 180°)

Particolari isometrie indirette sono:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + ysen\alpha \\ y' = xsen\alpha - y\cos\alpha \end{cases}$$

“ **isometria indiretta”** di centro l’origine

Non è una vera rotazione: è una trasformazione che ruota effettivamente la figura dell'angolo α ma la inverte. Ad esempio inverte il senso di lettura dei vertici di un triangolo.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + q \end{cases}$$

simmetria assiale (asse parallelo all’asse x) (α = 0°)

$$\begin{cases} x' = -x + p \\ y' = y \end{cases}$$

simmetria assiale (asse parallelo all’asse y) (α = 180°)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

simmetria assiale rispetto alla bisettrice (α = 90°)

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q \end{cases}$$

glissosimmetria: è la composizione di una simmetria assiale

con $a^2 + b^2 = 1$ e di una traslazione di vettore parallelo all’asse di simmetria

Casi particolari di glissosimmetria:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = -y \end{cases}$$

asse di simmetria = asse x, traslazione parallela all'asse x

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + q \end{cases}$$

asse di simmetria = asse y, traslazione parallela all'asse y

ISOMETRIE – RETTE UNITE – PUNTI UNITI

Isometrie dirette

- traslazione nessun punto unito, infinite rette globalmente unite

- **simmetria centrale** un punto unito, infinite rette globalmente unite, involutoria

- **rotazione** un punto invariante, nessuna retta invariante

Isometrie inverse

- **simmetria assiale** una retta puntualmente invariante,
infinite rette globalmente invarianti (quelle ortogonali all’asse di simmetria)
involutoria

- **glisso simmetria** una retta globalmente unita