Il periodo precedente a Riemann

Il periodo medievale

Il XXVII secolo

Cavalieri

Leibnitz e Newton

L'integrale di Riemann

Formule di quadratura

L'integrale di Lebesgue

Teorie moderne dell'integrale

Storia della teoria dell'integrazione

idee e metodi da Riemann ai giorni nostri

Michele Campiti

Dipartimento di Matematica
Università del Salento E-Mail: michele.campiti@unile.it

Storia e Fondamenti della Matematica 1
a.a. 2006–07

Indice

1. Il periodo precedente a Riemann
2. Il periodo medievale
3. Il XXVII secolo
   - Cavalieri
   - Leibnitz e Newton
4. L'integrale di Riemann
5. Formule di quadratura
6. L'integrale di Lebesgue
7. Teorie moderne dell'integrale

Il periodo greco

Sebbene la teoria dell'integrazione si sia sviluppata soprattutto a partire dall'epoca di Riemann, alcune idee e metodi traggono spunto da molto prima e risalgono a matematici come Euclide, Eudosso di Cnide ed Archimede. Altri matematici che hanno avuto un ruolo importante nello sviluppo della teoria dell'integrazione di Riemann sono Leibnitz e Newton.

Conviene pertanto cominciare a dare una sguardo al periodo greco.

Il periodo greco

Nel periodo greco, il problema principale connesso al calcolo integrale era essenzialmente il calcolo di aree e volumi.

Il primo matematico da citare a tale proposito è sicuramente Euclide (300 a.C.) che nel libro "Gli Elementi" ha fornito un metodo per calcolare alcuni volumi ed aree, tra cui principalmente prismi e piramidi (oltre a fare anche qualche considerazione sulla quadratura del cerchio).

Il primo vero precursore del calcolo integrale può essere considerato Archimede (287–212 a.C.). Archimede si è occupato del volume della sfera e del cilindro ed anche della quadratura della parabola. Ha anche considerato il problema della determinazione del baricentro di tali figure.

Il metodo di esaustione

Ad Archimede si deve l'uso sistematico del metodo di esaustione, tuttavia già introdotto da Eudosso di Cnide (408–355 a.C.).

Il metodo si basava sull'idea di inscrivere e circoscrivere figure rettilinee attorno ad una figura curva e di continuare a moltiplicare indefinitamente il numero dei lati del poligono fino ad approssimare il più possibile la linea curva. Alla base del metodo vi era la seguente affermazione

Date due grandezze aventi un certo rapporto (cioè, nessuna delle quali sia zero) è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra grandezza.

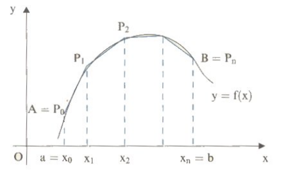
Il metodo di esaustione

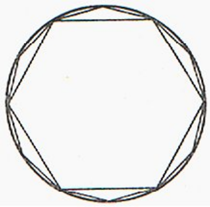
Partendo da questo Eudosso ricavò la proposizione che costituiva la base del metodo di esaustione:

Se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata.

Con questo teorema riguardante le grandezze di figure curvilinee si riuscì a stabilire la misura dell'area di figure curvilinee con sempre maggiore approssimazione. Qualsiasi figura non rettilinea poteva essere analizzata attraverso il metodo di esaustione, suddividendo le figure in intervalli sempre più piccoli raggiungendo così una migliore approssimazione.

Il metodo di esaustione





Il metodo di esaustione per il calcolo di aree

Il metodo di esaustione

In termini attuali il metodo si esprime con la seguente proprietà dei gruppi ordinati:

Considerato un gruppo ordinato G, se $a, b \in G$ e se

$$a^k < b$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora a è l'elemento neutro di G.

I gruppi ordinati che verificano la proprietà precedente vengono oggi denominati archimedei. La nozione viene estesa anche agli insiemi ordinati e la proprietà di $\mathbb{N}$:

$$n \in \mathbb{N} \implies \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m > n\,,$$

viene spesso riferita dicendo che $\mathbb{N}$ è un insieme archimedeo (oppure che $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente).

Il metodo di esaustione

Il metodo di esaustione si applica spesso procedendo per assurdo; per dimostrare che un'area o un volume A è uguale a B, si suppone $A < B$ e si considera $\varepsilon > 0$ tale che $B - A = \varepsilon$. A questo punto si considerano figure geometriche contenute in A (quindi di area o volume $A_n < A$) tali che $B - A_n < \varepsilon$; da ciò segue $A > A_n > B - \varepsilon = A$ e quindi una contraddizione. In modo analogo si procede supponendo che $A > B$.

Tale metodo è stato utilizzato da Archimede per dimostrare che il volume del tetraedro è un terzo del volume del prisma avente stessa base e stessa altezza. La contraddizione è stata ottenuta considerando prismi contenuti e contenenti il tetraedro.

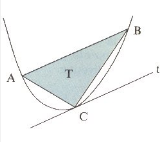
Il segmento parabolico

Un'applicazione importante considerata da Archimede è stata la determinazione dell'area del segmento parabolico, cioè della parte di piano limitata da un arco di parabola e dalla corda corrispondente.

Il segmento parabolico

Egli giunge a stabilire che l'area del segmento parabolico è 4/3 dell'area T del triangolo ABC avente come vertici le intersezioni A e B del segmento e C è il punto di tangenza della retta t parallela al segmento AB con la parabola:

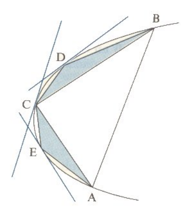
$$S = \frac{4}{3} T \, .$$



Il periodo precedente a Riemann
Il periodo medievale
Il XXVII secolo
Cavalieri
Leibnitz e Newton
L'integrale di Riemann
Formule di quadratura
L'integrale di Lebesgue
Teorie moderne dell'integrale

Il segmento parabolico

Archimede trova che la somma delle aree dei triangoli AEC e CDB, inscritti nei segmenti parabolici individuati dalle corde AC e CB, è uguale a $1/4$ dell'area del triangolo ABC. Questo viene ottenuto con semplici considerazioni geometriche considerando il trapezio avente le basi determinati dal segmento AB e la tangente t e lati determinati dalle tangenti ottenute iterando la costruzione del triangolo di partenza.



Il segmento parabolico

Con queste considerazioni Archimede giunge ad una prima approssimazione dell'area del segmento parabolico:

$$S = T + \frac{1}{4}\,T\ .$$

Iterando tale procedimento, si ottiene una serie di triangoli di area sempre inferiore individuati e inscritti nei quattro segmenti parabolici AE, EC, CD e DB. La loro somma equivale a $1/4$ della somma delle aree dei triangoli AEC e CDB, che a loro volta valgono $1/4T$ ed è pertanto uguale a $1/16T$. Giunti a questo punto, una migliore approssimazione dell'area del segmento parabolico è espressa dalla relazione:

$$S = T + \frac{1}{4}\,T + \frac{1}{16}\,T\ .$$

Il segmento parabolico

A questo punto si comprende che un'approssimazione sempre migliore viene data da

$$S = T + \frac{1}{4}\,T + \frac{1}{16}\,T + \frac{1}{64}\,T + \frac{1}{256}\,T + \dots\ .$$

La teoria attuale delle serie consente di calcolare subito la somma precedente; in realtà, in questo caso il risultato si può raggiungere facilmente osservando che

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{1-(1/4)^n}{1-1/4} = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\ .$$

Osservato che $1/4^n$ diventa arbitrariamente piccolo iterando il procedimento, si ottiene

$$S = \frac{4}{3}\,T\ .$$

Conclusioni sul metodo di esaustione

Il metodo di esaustione rappresenta un metodo di approssimazione dal basso e dall'alto. La stessa idea verrà utilizzata in seguito in vari ambiti.

- *Introduzione dei numeri reali* (metodo di Dedekind): vengono introdotti gli insiemi separati e contigui e gli elementi di separazione.
- *Integrale di Riemann* (somme superiori ed inferiori).
- *Metodo di Perron per il problema di Dirichlet* (funzioni armoniche come elementi di separazione tra funzioni subarmoniche e funzioni superarmoniche).

Conclusioni sul metodo di esaustione

Bisogna aggiungere che i metodi usati da Archimede erano spesso empirici e che erano basati sul fatto che un'area veniva pensata equivalente ad un insieme di segmenti; la determinazione dell'area seguiva un metodo meccanico di ricerca di un equilibrio e questo aveva condotto Archimede a considerare anche il problema del baricentro.

In realtà, vi era la convinzione geometrica che una figura fosse formata da parti indivisibili, gli "atomi" e che ne occorressero un numero finito; tali problemi avevano condotto a contraddizioni (simili al "paradosso di Zenone") che avevano spinto poi Archimede ad abbandonare i metodi meccanici e ad usare il metodo di esaustione.

Conclusioni sul metodo di esaustione

Anche i metodi empirici di Archimede hanno avuto delle conseguenze nelle teorie moderne; l'uso degli atomi è comune in

- *geometria differenziale* in cui una "piccola" porzione di superficie viene considerata piana;
- *fisica* quando i modelli utilizzati portano ad equazioni differenziali che descrivono un fenomeno;
- *analisi numerica* con metodi di discretizzazione delle soluzioni di un problema.

Metodi di decomposizione

Un ulteriore metodo utilizzato per il calcolo di aree e di volumi è quello di decomporre una figura in un numero finito di figure, ognuna delle quali equivalente (in un senso da definire) ad una di cui è nota l'area o il volume.

In termini attuali, si consideri l'insieme G delle trasformazioni di $\mathbb{R}^3$ formato dalle traslazioni, rotazioni ed inversioni; due figure A e B sono uguali rispetto a G se una è ottenuta dall'altra mediante una trasformazione in G.
Due figure sono invece equivalenti rispetto a G se sono ottenute l'una dall'altra con un numero finito di trasformazioni in G (esistono un numero finito di figure a due a due uguali che trasformano la prima nella seconda).

Metodi di decomposizione

In $\mathbb{R}^2$ i poligoni equivalenti hanno anche la stessa area e vale anche il viceversa. La stessa cosa non accade in $\mathbb{R}^3$ in quanto esistono in tal caso poliedri con lo stesso volume che non sono equivalenti.

Anche Gauss aveva studiato, purtroppo con insuccesso, problemi di questo tipo.

Il periodo medievale

A causa dell'influenza degli Arabi, il periodo medievale ha avuto una forte caratterizzazione algebrica che ha portato anche ad un concetto in germe di funzione. Al contrario, Archimede vedeva la parabola solamente dal punto di vista delle sue proprietà geometriche.

Il concetto di funzione ebbe un grande impulso successivamente per merito di Cartesio (1596–1650). Le figure geometriche vennero reinterpretate anche in termini analitici (soprattutto le curve del tipo $y = ax^n + b$; bisogna osservare che si parlava appunto di curve algebriche e non di funzioni e che la relazioni venivano espresse verbalmente mancando ancora una notazione efficiente).

Il periodo medievale

In tale periodo il sistema aritmetico decimale posizionale indiano venne esteso fino a includere le frazioni decimali e, nel XII secolo, il matematico persiano Omar Khayyam generalizzò i metodi di estrazione delle radici quadrate e cubiche alle radici di indice superiore.

Le ricerche di Archimede sulle aree e sui volumi furono continuate da alcuni geometri, tra cui Ibrahim ibn Sinan. Altri geometri applicarono la teoria delle coniche per risolvere problemi di ottica.

Dalla funzione seno dell'India e dal teorema di Menelao, i matematici, da Habas al-Hasib a Nasir ad-Din at-Tusi, diedero inizio alle discipline matematiche della trigonometria sferica e della trigonometria piana.

Il periodo medievale

Nel periodo tardo-medievale alcuni autori, ad esempio Nicole Oresme, fecero interessanti considerazioni sul problema dell'infinito in matematica.
Tuttavia la prima scoperta veramente importante dell'Occidente risale solo all'inizio del XVI secolo e riguarda una formula algebrica per la soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado che venne pubblicata nel 1545 dal matematico italiano Gerolamo Cardano nella sua Ars Magna. Il XVI secolo vide anche la nascita dei moderni simboli matematici e algebrici.
Solamente nel XVII secolo si possono osservare nuovi impulsi al calcolo differenziale ed integrale.

Il XVII secolo

Il XVII secolo registra un grande impulso per il calcolo degli integrali. Questo avviene soprattutto per i contributi di Keplero (1571–1630) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647), un allievo di Galilei.
Keplero ha utilizzato metodi alternativi a quello di esaustione per il calcolo di volumi ed ha considerato solidi generati dalla rotazione di circonferenze, ellissi, parabole, iperboli.
Ha sviluppato metodi essenzialmente geometrici per i solidi di rotazione.

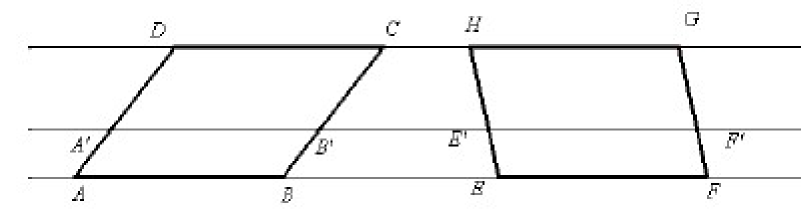
Il XVII secolo - Cavalieri

Un piccolo approfondimento è necessario per quanto riguarda la figura di Cavalieri. La sua opera principale è *Geometria indivisibilibus continuorum* del 1635.
L'idea centrale è la seguente: ogni area è formata da linee o aree indivisibili, e ogni solido è composto da aree o volumi indivisibili.
In effetti, l'idea di Cavalieri si avvicina al metodo di esaustione di Archimede. Il metodo degli indivisibili può essere espresso con il seguente *principio di Cavalieri*:

Se due solidi hanno uguale altezza, e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto.

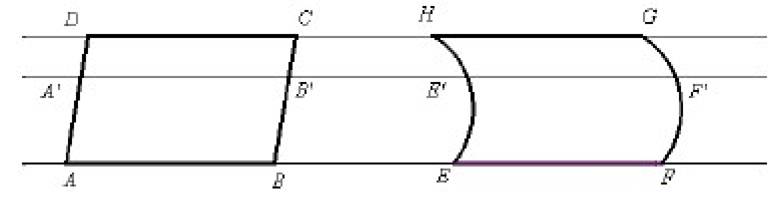
Il XVII secolo - Cavalieri

Come si vede, il principio di Cavalieri è strettamente collegato al principio di equivalenza utilizzato per le trasformazioni in $\mathbb{R}^3$.
La sua formulazione del principio non è ovviamente in termini infinitesimali ma geometrici.
Seguono alcuni esempi:



Il principio di Cavalieri

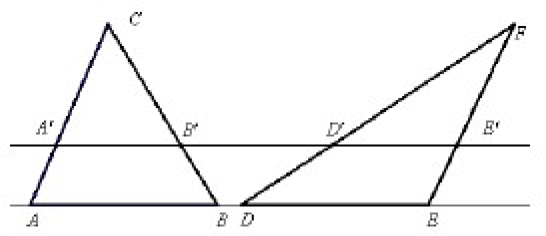
Esempi



Il segmento $A'B'$ ha sempre la stessa lunghezza del segmento $E'F'$.

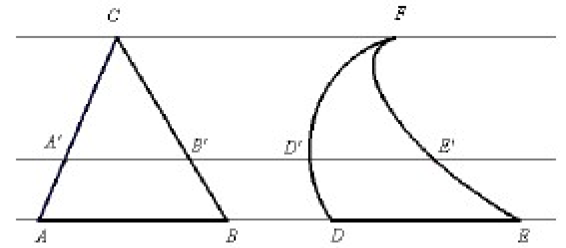
Il principio di Cavalieri

Esempi



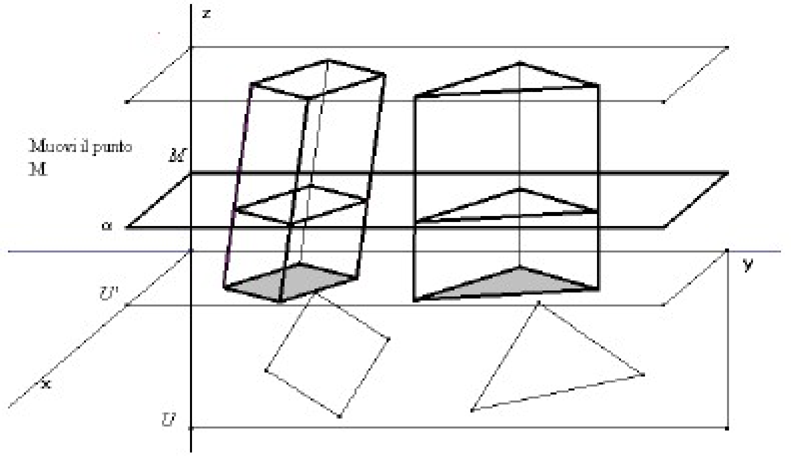
Il principio di Cavalieri

Esempi

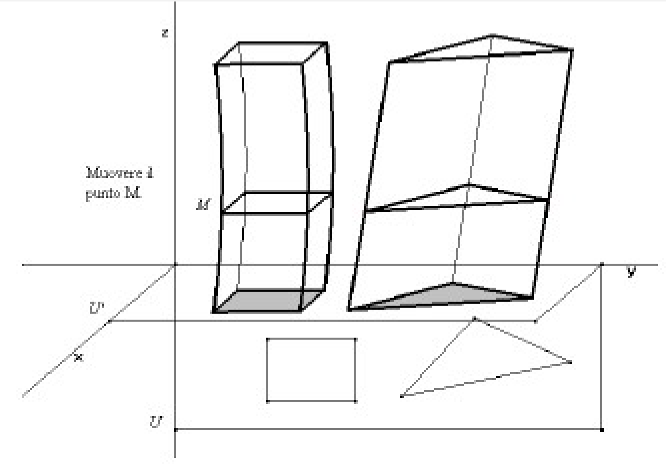


Teorie dell'integrazione
M. Campiti
Il periodo precedente a Riemann
Il periodo medievale
Il XXVII secolo
Cavalieri
Leibnitz e Newton
L'integrale di Riemann
Formule di quadratura
L'integrale di Lebesgue
Teorie moderne dell'integrale

Esempi

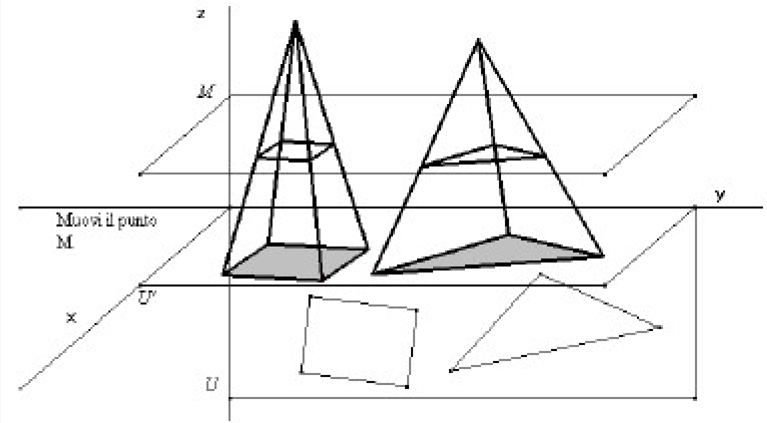


Esempi

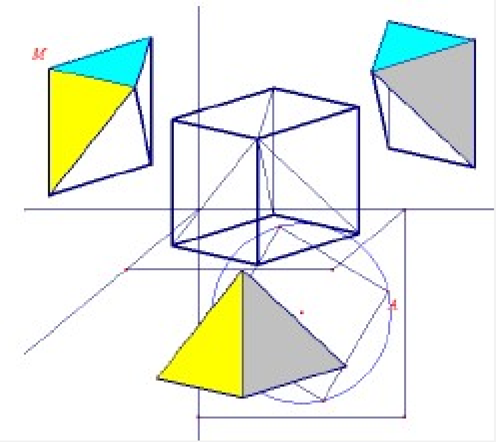


Il periodo precedente a Riemann
Il periodo medievale
Il XXVII secolo
Cavalieri
Leibnitz e Newton
L'integrale di Riemann
Formule di quadratura
L'integrale di Lebesgue
Teorie moderne dell'integrale

Esempi

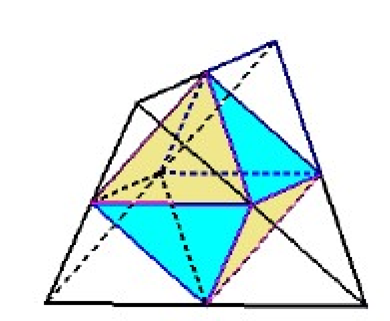


Esempi



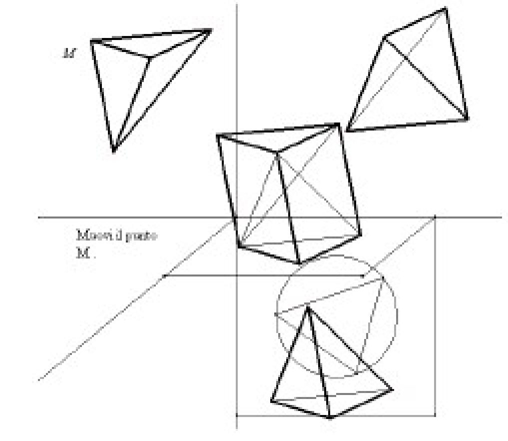
Il principio di Cavalieri

Esempi



Il principio di Cavalieri

Esempi

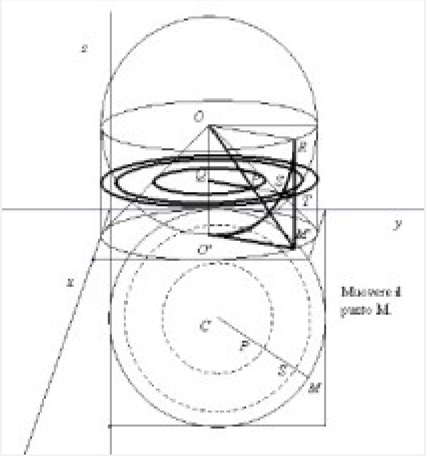


Teorie dell'integrazione
M. Campiti
Il periodo precedente a Riemann
Il periodo medievale
Il XXVII secolo
Cavalieri
Leibnitz e Newton
L'integrale di Riemann
Formule di quadratura
L'integrale di Lebesgue
Teorie moderne dell'integrale

Esempi

Un'altra applicazione del principio di Cavalieri riguarda la determinazione del volume della sfera per via elementare, utilizzando la cosiddetta "scodella di Galileo". Si dimostra che la sfera è equivalente alla figura detta "anticlessidra" (e costituita da due scodelle di Galileo), che si ottiene per differenza da un cilindro equilatero (cioè, un cilindro in cui il diametro di base è uguale all'altezza) e una "clessidra" formata da due coni uguali opposti al vertice O. I coni che formano la clessidra hanno quindi altezza uguale al raggio di base. Dal principio di Cavalieri segue che la scodella di Galileo è equivalente a uno dei coni che formano la clessidra. La dimostrazione è basata sull'equivalenza tra il cerchio di raggio QP e la corona circolare generata dal segmento ST in una rotazione completa attorno al punto Q.

Il principio di Cavalieri



Il principio di Cavalieri

Un'ultima osservazione di tipo analitico. Il principio di Cavalieri è stato utilizzato per stabilire l'uguaglianza

$$\int_0^{2a} x^n \, dx = \int_0^a \left((a+x)^n + (a-x)^n\right) \, dx$$

pe gli interi $n = 1, \ldots, 9$. Tale formula aveva ovviamente significato sommando elementi indivisibili assimilati a parallelogrammi.

Dalla formula precedente, Cavalieri ha dedotto sostanzialmente l'uguaglianza

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \, .$$

Leibnitz e Newton

Leibnitz (1646–1716) e Newton (1642–1727) furono i primi matematici ad introdurre il calcolo differenziale ed integrale. L'introduzione del differenziale da parte di Leibnitz era legato ovviamente al concetto geometrico di retta tangente. L'uso della simbologia matematica introdotta da Leibnitz ha dato luogo anche a moderne teorie ed ha ispirato ad esempio Robinson a Luxemburg a sviluppare una teoria degli infinitesimi e degli infiniti, che è stata posta a fondamento dell'Analisi non standard.

Ritornando al problema del calcolo integrale, Newton aveva posto il problema del calcolo dell'operazione inversa di derivazione, cioè della determinazione di una funzione F tale che $F' = f$ con f assegnata.

Il calcolo delle primitive

Tale problema è essenzialmente quello del calcolo delle primitive di un'assegnata funzione (integrale indefinito) che Newton aveva affrontato collegandolo con il problema delle aree.
Ciò era stato effettuato per classi particolari di funzioni (funzioni potenza e polinomi). Quindi era stato stabilito il teorema di Torricelli per tali funzioni.
A livello di notazioni e di terminologia , il simbolo di integrale era stato introdotto da Leibnitz come una "S" allungata (abbreviazione di somma). Il termine "integrale" fu introdotto solo successivamente da Bernoulli. L'integrazione non era considerata un'operazione sulle funzioni (d'altra parte il termine "funzione" era usato da Leibnitz solamente in relazione alle tangenti ed altre nozioni geometriche; nell'accezione attuale il termine è stato introdotto da Bernoulli (1718); le notazioni oggi utilizzate sono dovute ad Eulero (1707–1783)).

Berhard Riemann (1826–1866)

Il principio di Cavalieri aveva condotto all'idea che il trapezoide relativo ad una funzione positiva e limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$T(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

potesse essere immaginato come sovrapposizione di segmenti verticali (congiungenti i punti $(x, 0)$ e $(x, f(x))$); inoltre il fatto che si pensasse ad un numero finito di componenti per le figure piane aveva portato in modo naturale all'introduzione delle somme superiori ed inferiori. La formulazione della teoria dell'integrazione di Riemann prende da un lato spunto da tali fattori e dall'altro dal metodo di esaustione che nello stesso periodo veniva utilizzato anche per la costruzione dei numeri reali ad opera di Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) e della teoria della misura secondo Camille Jordan (1838–1922).

Riemann e Jordan

Teorie dell'integrazione

M. Campiti

Il periodo precedente a Riemann

Il periodo medievale

Il XXVII secolo

Cavalieri

Leibnitz e Newton

L'integrale di Riemann

Formule di quadratura

L'integrale di Lebesgue

Teorie moderne dell'integrale

Per maggiori dettagli sulla teoria dell'integrazione di Riemann si rimanda a

http://www.matematica.unile.it/didattica/materiale/chap8.pdf

mentre per maggiori dettagli sulla teoria della misura di Jordan si rimanda a

http://www.matematica.unile.it/didattica/materiale/chap11.pdf

Formule di quadratura

Contestualmente allo sviluppo del calcolo integrale si è sviluppato anche lo studio delle formule di quadratura, che forniscono valori approssimati (utili per l'approssimazione numerica) di un integrale definito.
Più precisamente, assegnata una funzione continua (o più in generale integrabile) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una formula di quadratura è del tipo:

$$\int_a^b f(x)\, dx \sim \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f(x_i) \ ,$$

dove le costanti α_i, $i = 0, \ldots, N$ sono denominate *pesi* ed i punti x_i *nodi* della formula.

Formule di quadratura

Per semplicità si suppone che la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ consista di N intervalli $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, di uguale ampiezza h. Da ciò si ricava

$$x_i = a + \frac{i}{N}(b-a) \ ,$$

e inoltre

$$h = \frac{b-a}{N} \ .$$

Nel seguito si porrà, per semplicità $y_i := f(x_i)$ per ogni $i = 0, \ldots, N$

Il metodo del trapezio

Il metodo del trapezio (basato in parte sul metodo del segmento parabolico di Archimede) consiste nel considerare in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ di ampiezza h il trapezio rettangolo che ha tra i suoi vertici i punti dell grafico della funzione negli estremi. Ognuno di tali trapezi ha la stessa altezza, cioè h. L'area T_k del trapezio k-esimo è data da

$$T_k = \frac{y_{i+1} + y_i}{2}\, h$$

(l'area può essere considerata con il segno negativo se la funzione non è positiva).

Il metodo del trapezio

La somma degli N trapezi T_k fornisce un'approssimazione dell'integrale definito, cioè

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{2N}(y_0 + 2y_1 + \ldots 2y_{N-1} + y_N)\,.}$$

Tale formula viene denominata "*formula di quadratura trapezoidale*".

Il metodo del trapezio

Si può dimostrare che se f è derivabile due volte con derivata seconda continua, l'errore della formula di quadratura trapezoidale è dato da

$$\frac{1}{12}\, h^3\, \|f''\|$$

(se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, la norma $\|g\|$ di g è definita da

$$\|g\| := \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\ ) .$$

La formula di Simpson

Si suppone N pari e si considera in ogni intervallo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, 2, \dots, N/2 - 1$ l'arco di parabola passante per i punti (x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}) e (x_{2i+2}, y_{2i+2}).
La parabola di equazione

$$p_i(x) := a(x - x_{2i})^2 + b(x - x_{2i}) + y_{2i}$$

passa per il punto (x_{2i}, y_{2i}) e imponendo le condizioni

$$\begin{cases} a(x_{2i+1} - x_{2i})^2 + b(x_{2i+1} - x_{2i}) + y_{2i} = y_{2i+1} \\ a(x_{2i+2} - x_{2i})^2 + b(x_{2i+2} - x_{2i}) + y_{2i} = y_{2i+2} \end{cases},$$

si ottiene

$$\begin{cases} ah^2 + bh = y_{2i+1} - y_{2i} \\ 4ah^2 + 2bh = y_{2i+2} - y_{2i} \end{cases},$$

da cui

$$a = \frac{y_{2i} - 2\,y_{2i+1} + y_{2i+2}}{2\,h^2}, \qquad b = \frac{-3\,y_{2i} + 4\,y_{2i+1} - y_{2i+2}}{2\,h}.$$

La formula di Simpson

Integrando la parabola ottenuta nell'intervallo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, si ricava

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p_i(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_{2i} + 4\,y_{2i+1} + y_{2i+2}\right) .$$

Sommando gli integrali ottenuti per $i = 0, N/2 - 1$, si ottiene la *formula di Simpson*

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\sim \frac{b-a}{3N} \sum_{i=0}^{N/2-1} (y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) \\ &= \frac{h}{3}\left(y_0 + y_N + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} y_{2i} + 4\sum_{i=0}^{N/2-1} y_{2i+1}\right) . \end{aligned}}$$

La formula di Simpson

Se f è derivabile quattro volte con derivata quarta continua, l'errore della formula di quadratura di Simpson è dato da

$$\frac{1}{90}\, h^5 \left\| f^{(4)} \right\| \,.$$

Le formule di Newton-Côtes

Le formule di quadratura di Newton-Côtes sono basate sul fatto che in ogni intervallo che costituisce una suddivisione assegnata viene utilizzato un polinomio interpolatore di grado n costruito su nodi equidistanti.

Le *formule di Newton-Côtes* sono di due tipi:

- Le formule di Newton-Côtes *chiuse* in cui gli estremi dell'intervallo di integrazione sono considerati tra i nodi;
- Le formule di Newton-Côtes *aperte* in cui tutti i nodi sono interni ad ogni intervallo di integrazione.

Il polinomio interpolatore di Lagrange

Conviene considerare in generale il modo in cui si costruisce il polinomio interpolatore di grado n. Sia $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ una funzione reale e si considerino $n+1$-punti distinti $x_0, \dots, x_n \in [c, d]$. Per ogni $k = 0, \dots, n$, il polinomio di grado n

$$\ell_k(x) := \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

si annulla in tutti i punti x_j con $j \neq k$ e assume il valore 1 in x_k.

Il polinomio interpolatore di Lagrange

Conseguentemente il polinomio

$$\boxed{p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\,\ell_k(x)\ ,}$$

ha grado n ed assume gli stessi valori della funzione g nei punti $x_0, \dots, x_n$.

Esso viene denominato *polinomio interpolatore di Lagrange* di grado n per g nei nodi $x_0, \dots, x_n$.

Le formule di Newton-Côtes

Teorie dell'integrazione

M. Campiti

Il periodo precedente a Riemann

Il periodo medievale

Il XXVII secolo

Cavalieri

Leibnitz e Newton

L'integrale di Riemann

Formule di quadratura

L'integrale di Lebesgue

Teorie moderne dell'integrale

A questo punto le formule di quadratura di Newton-Côtes di grado n possono essere facilmente considerate:
Nelle formule chiuse in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N$, vengono considerati gli $n+1$ nodi

$$y_j = x_i + \frac{j}{n}\left(x_{i+1} - x_i\right), \quad j = 0, \dots, n\,.$$

Nelle formule aperte invece vengono considerati gli $n+1$ nodi (si divide l'intervallo in $n+2$ sottointervalli e si considerano gli estremi interni)

$$y_j = x_i + \frac{j}{n+2}\left(x_{i+1} - x_i\right), \quad j = 1, \dots, n+1\,.$$

Le formule di Newton-Côtes

Alternativamente, nelle formule aperte possono essere considerati i nodi

$$y_j = x_i + \frac{j + 1/2}{n+1}\left(x_{i+1} - x_i\right) , \quad j = 0, \dots , n$$

che sono equispaziati considerando intervalli contigui; tali nodi tuttavia non sono frequentemente utilizzati.
In ogni caso a questo punto si considera il polinomio interpolatore di Lagrange $p_{n,i}$ di grado n sui nodi y_j considerati e tale polinomio viene integrato nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$. La somma di tale integrali fornisce la formula generale di Newton-Côtes

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{k=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{n,i}(x)\,dx \ .}$$

Le formule di Newton-Côtes

Si supponga di considerare in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ un polinomio interpolatore di grado n. Allora si può dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che l'errore della formula di Newton-Côtes sia dato da

$$C(b-a)^{n+2}\|f^{(n+1)}\|$$

per ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte e con derivata $n+1$-esima continua.

Le formule di Newton-Côtes

Esempi.

- Calcolare approssimativamente l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx\ .$$

  Il calcolo esatto può essere ottenuto ponendo $t = \arctan(x/2)$.

- Calcolare approssimativamente l'integrale delle funzioni

$$\frac{\cos x}{1+x^2}\ , \quad e^{\sin x}\sin x\ , \quad \sqrt{x}\cos x^2$$

  nell'intervallo $[0,\pi]$.

Ulteriori sviluppi sulle formule di quadratura

Formule a passo variabile

Si tratta di formule di quadratura in cui il passo h non è costante e dipende dall'oscillazione della funzione (o delle sue derivate); ad esempio, si può richiedere che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ risulti

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x) - f(x_i)| \le \delta$$

con $\delta > 0$ fissato.
In tal caso basta scegliere

$$x_{i+1} = \sup\left\{ t \in [x_i, b] \mid \sup_{x\in[x_i,t]} |f(x) - f(x_i)| \le \delta \right\} .$$

Ulteriori sviluppi sulle formule di quadratura

Formule Gaussiane

Si tratta di formule di quadratura di tipo interpolatorio a nodi non equidistanti costruite in modo da massimizzare il grado di precisione. I nodi vengono scelti considerando gli zeri di opportuni polinomi ortogonali.
Un esempio elementare è dato dalla formula del punto medio in cui il grado di precisione passa da 0 a 1 collocando opportunamente il nodo x_0.

L'integrale di Lebesgue

Teorie dell'integrazione

M. Campiti

Il periodo precedente a Riemann

Il periodo medievale

Il XXVII secolo

Cavalieri

Leibnitz e Newton

L'integrale di Riemann

Formule di quadratura

L'integrale di Lebesgue

Teorie moderne dell'integrale

La teoria dell'integrazione di Riemann e la corrispondente teoria della misura di Jordan furono ben presto soggette ad alcune obiezioni:

- La concezione dei trapezoidi come sovrapposizione di rettangoli di base arbitrariamente piccola (Cavalieri) doveva essere supportata dalla possibilità di passare dal caso finito a quello numerabile. Il fatto che i numeri razionali di un intervallo limitato non costituissero un insieme misurabile contraddiceva invece tale possibilità.
- I teoremi di passaggio al limite richiedevano ipotesi molto restrittive come la convergenza uniforme.
- La presenza di insiemi aperti non misurabili.

Tali obiezioni hanno portato gradualmente all'introduzione della teoria dell'integrazione di Lebesgue.

La misura di Borel

Un primo contributo alla soluzione dei problemi precedenti è stato dato da Emile Borel (1871–1956) nel 1898.
Il concetto di misura introdotto da Borel ha aperto la strada alla teoria dell'integrazione di Lebesgue.
Tale concetto era basato sul fatto che ogni insieme aperto di $\mathbb{R}$ può essere scritto come unione numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.
Pertanto, se $V \subset \mathbb{R}$ è un insieme aperto e limitato e se $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di intervalli aperti a due a due disgiunti tali che $V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n$, si pone

$$m(V) := \sum_{n=0}^{+\infty} |I_n|$$

(tale misura è finita in quanto V è limitato).

La misura di Borel

La misura degli insiemi aperti introdotta da Borel non dipende dalla rappresentazione dell'insieme ed inoltre ha l'importante proprietà di essere completamente additiva (σ-additiva):

Se $V \subset \mathbb{R}$ è un insieme aperto e limitato e se $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi aperti a due a due disgiunti tali che $V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_n$, allora

$$m(V) := \sum_{n=0}^{+\infty} m(V_n) \, .$$

Tuttavia Borel non utilizzò esattamente tale proprietà in quanto non era ancora chiaro il concetto di insieme aperto.

La misura di Baire

Il concetto di insieme aperto (ed anche la denominazione) fu introdotta da René Baire (1874–1932) nel 1899 seguendo il metodo utilizzato ancora oggi negli spazi metrici (vengono prima definite le sfere aperte e conseguentemente gli insiemi aperti sono gli insiemi che contengono una sfera aperta con centro in ogni loro punto fissato arbitrariamente).
La misura può essere estesa anche agli insiemi chiusi (cioè il cui complementare è aperto) e limitati; infatti se $F \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme chiuso e limitato si può considerare un intervallo $[a, b]$ contenente F e tenendo presente che $[a, b] \setminus F$ è aperto e limitato si può porre

$$m(F) := b - a - m([a, b] \setminus F) .$$

La misura di Baire

Nella formula precedente viene utilizzata la possibilità di considerare anche il complementare per definire la misura di insiemi più generali.
L'utilizzo ripetuto di complementari e unioni numerabili conduce alla formulazione del concetto di σ-anello e di σ-algebra.
Sia X un insieme non vuoto e sia Γ un insieme di sottoinsiemi di X. Si dice che Γ è un σ-anello se è stabile rispetto ad unioni numerabili e complementazione, cioè

- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ :\ V_n \in \Gamma \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \Gamma;$
- $V, W \in \Gamma \implies V \setminus W \in \Gamma.$

Se, in più, $X \in \Gamma$ allora il σ-anello Γ si dice σ-algebra di sottoinsiemi di X.

La misura di Baire

L'interesse verso tali famiglie di sottoinsiemi deriva dal fatto di richiedere ad una misura $m : \Gamma \to [0, +\infty[$ la seguente proprietà di numerabile additività

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(V_n)$$

per ogni successione $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi a due a due disgiunti di Γ.

Tuttavia Borel e Baire non utilizzarono la teoria della misura per introdurre una nuova teoria dell'integrazione.

L'integrale di Lebesgue

Henri Lebesgue (1875–1941) sviluppò una nuova teoria della misura più generale di quella di Borel. L'idea di base è quella di richiedere comunque l'uguaglianza di una misura interna e di una misura esterna, considerando tuttavia insiemi più generali dei plurintervalli.

Precisamente, se V è un qualsiasi sottoinsieme, la misura esterna di V viene definita come

$$m_e(V) := \inf_{U \text{ insieme aperto, } V \subset U} m(U) .$$

Analogamente, la misura interna di V viene definita come

$$m_i(V) := \sup_{F \text{ insieme chiuso, } F \subset V} m(F) .$$

Un insieme si dice misurabile se $m_e(V) = m_i(V)$. Si può riconoscere che gli insiemi misurabili formano un σ-anello e che la misura così definita risulta completamente additiva.

L'integrale di Lebesgue

Partendo dalla teoria della misura descritta, Lebesgue sviluppò la teoria della misura in $\mathbb{R}^2$ e la utilizzò per definire l'integrale di una funzione positiva utilizzando metodi geometrici (misura del trapezoide).
Successivamente Lebesgue sviluppò anche un metodo analitico per definire l'integrale e tale metodo mise in evidenza le differenze con l'integrale di Riemann. Infatti Lebesgue non considerò suddivisioni dell'intervallo base $[a, b]$ ma in un certo senso dell'insieme dei valori. Infatti si supponga che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia una funzione limitata tale che $m \leq f(x) \leq M$. Per ogni $\xi, \eta \in [m, M]$ con $\xi \leq \eta$ si pone

$$V_{\xi,\eta} := \{x \in [a, b] \mid \xi \leq f(x) \leq \eta\} \ .$$

La funzione f viene definita *misurabile* se $V_{\xi,\eta}$ è misurabile per ogni $\xi, \eta \in [m, M]$ tali che $\xi \leq \eta$.

L'integrale di Lebesgue

Il concetto di misurabilità richiede quindi che le immagini reciproche di intervalli chiusi siano sottoinsiemi misurabili dell'insieme di partenza (alla stessa proprietà si perviene considerando intervalli aperti oppure semiaperti).

Si supponga ora che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia misurabile.
Per definire l'integrale di f, Lebesgue considerò suddivisioni dell'intervallo $[m, M]$ anziché dell'intervallo $[a, b]$.
Sia $P = \{\xi_0, \dots, \xi_n\}$ una suddivisione dell'intervallo $[m, M]$ e, per ogni $i = 0, \dots, n-1$, si ponga

$$V_i := \{x \in [a, b] \mid \xi_i \le f(x) < \xi_{i+1}\} .$$

L'integrale di Lebesgue

Si definiscono le somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i m(V_i) \,, \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{i+1} m(V_i) \,,$$

che corrispondono alle somme inferiori e superiori considerate nell'integrale di Riemann.

Se tali somme hanno un comune estremo (quello superiore delle prime ed inferiore delle seconde), allora la funzione si dice integrabile secondo Lebesgue e il comune estremo viene denominato *integrale di Lebesgue di f in* $[a, b]$.

Successivamente, Lebesgue ha esteso la sua teoria anche al caso di funzioni di più variabili e a certe classi di funzioni non limitate.

L'integrale di Lebesgue

I vantaggi dell'integrale di Lebesgue rispetto a quello di Riemann sono essenzialmente i seguenti:

- *Completa additività.* La misura di Lebesgue verifica la proprietà di completa additività.
- *Passaggio al limite.* Vale il **teorema della convergenza dominata di Lebesgue**: *se $f_n \to f$ quasi ovunque, cioè puntualmente tranne al più in un insieme di misura nulla, e se esiste una funzione integrabile secondo Lebesgue g tale che $|f_n| \leq g$ quasi ovunque, allora f è integrabile secondo Lebesgue e si ha*

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \,.$$

Tale teorema era basato sulla proprietà della convergenza monotona introdotta da Beppo Levi (1875–1961).

L'integrale di Lebesgue

Teorie dell'integrazione
M. Campiti
Il periodo precedente a Riemann
Il periodo medievale
Il XXVII secolo
Cavalieri
Leibnitz e Newton
L'integrale di Riemann
Formule di quadratura
L'integrale di Lebesgue
Teorie moderne dell'integrale

- *Teorema di Fubini-Tonelli.* In un caso particolare, sia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Allora gli integrali iterati

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \,, \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy \,,$$

esistono e coincidono entrambi con

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dm_{x,y}$$

dove $m_{x,y}$ denota la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$.

Tale teorema rappresenta una versione attuale e precisa del principio di Cavalieri.

L'integrale di Lebesgue

Rispetto all'integrale di Riemann, quello di Lebesgue ne costituisce una generalizzazione negli intervalli limitati e per funzioni limitate:

- *Se una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, essa è integrabile anche secondo Lebesgue ed in tal caso i due integrali coincidono.*

Vi sono tuttavia funzioni integrabili secondo Lebesgue che non lo sono secondo Riemann (ad esempio, la funzione di Dirichlet nell'intervallo $[0, 1]$ che assume il valore 1 nei punti razionali e 0 in tutti gli altri).

L'integrale di Lebesgue

La questione è più complessa per quello che riguarda funzioni non limitate o su un intervallo non limitato in cui si confronta l'integrale di Lebesgue con quello generalizzato (o in senso improprio) di Riemann.
Infatti, esistono funzioni integrabili (in senso improprio) secondo Riemann che invece non lo sono secondo Lebesgue; un esempio di questo tipo è stato trovato dallo stesso Lebesgue considerando la funzione

$$f(x) := \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\ ,$$

$x \in]0,1]$ e $f(0)=0$. Ciò dipende dal fatto che una funzione è integrabile secondo Lebesgue se e solo se lo è in valore assoluto, mentre per l'integrale improprio di Riemann l'assoluta integrabilità implica l'integrabilità ma non vale il viceversa.

L'integrale di Lebesgue

Un ulteriore questione riguardante la teoria di Lebesgue è l'eventuale esistenza di insiemi non misurabili. Lebesgue non ha saputo dare una risposta a tale problema, mentre Giuseppe Vitali (1875–1932) fornì un esempio di insieme non misurabile secondo Lebesgue nel 1905. Successivamente Kamke osservò che tale esempio era fondato sull'assioma della scelta e pose il problema dell'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue senza l'utilizzo di tale assioma.

Il problema delle primitive

Un'altra questione relativa all'integrale di Lebesgue riguardava l'esistenza di primitive.
L'integrale di Riemann dava una risposta soddisfacente a tale problema solamente per le funzioni continue (funzione integrale); se f è continua infatti una funzione primitiva

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

è derivabile e $F' = f$.
Tuttavia se f non è continua la questione è più complessa. Infatti esistono funzioni integrabili secondo Riemann (alcuni esempi sono stati trovati dallo stesso Lebesgue) per le quali la funzione primitiva non è derivabile in tutti i punti.

Il problema delle primitive

Ad esempio, una primitiva della funzione segno ($f(x) = 1$ se $x > 0$ e $f(x) = -1$ se $x < 0$) è la funzione valore assoluto che non è derivabile in 0.

Per quanto riguarda l'integrale di Riemann, si può riconoscere anche l'esistenza di funzioni che sono dotate di primitive ma che non sono integrabili; un esempio è stato dato da Vito Volterra (1860–1940) nel 1881.
Sia V un sottoinsieme perfetto (cioè contenente tutti i suoi punti di accumulazione) dell'intervallo $[0, 1]$ e si supponga che V sia ottenuto considerando il complementare di famiglie di intervalli aperti disgiunti. Si supponga inoltre che V non sia denso in $[0, 1]$ e che abbia misura strettamente positiva. Un esempio di questo tipo si ottiene considerando opportune generalizzazioni dell'insieme di Cantor.

Il problema delle primitive

Si consideri la funzione

$$\varphi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}\,, \qquad x \neq 0\,.$$

Se $]a,b[$ è uno degli intervalli aperti mediante i quali si costruisce V, si considera la funzione

$$F(x) := \begin{cases} \varphi(x-a)\,, & a < x \le \xi\,, \\ \varphi(\xi - a)\,, & \xi < x < a+b-\xi\,, \\ \varphi(b-x)\,, & a+b-\xi \le x < b\,, \end{cases}$$

su $]a,b[$ dove

$$\xi := \max\{x \in]a,b[\mid \varphi'(x-a) = 0, x \le (a+b)/2\}\,.$$

Si pone inoltre $F(x) = 0$ per ogni $x \in V$.

Il problema delle primitive

Si può riconoscere che F è derivabile in tutto l'intervallo $[0,1]$ e che la sua derivata è limitata. Poiché F' è discontinua nei punti di V essa non è integrabile secondo Riemann (infatti un noto teorema di Vitali asserisce che una funzione è integrabile secondo Riemann se e solo se essa è continua tranne al più in un sottoinsieme di misura nulla; nel caso in esame invece l'insieme V ha misura strettamente positiva).

Quindi per le funzioni del tipo considerato nell'esempio precedente una primitiva non può essere calcolata utilizzando l'integrale di Riemann.

Per quanto riguarda l'integrale di Lebesgue, lo stesso Lebesgue studiò la funzione $f(x) := x^2 \sin x^2$, $x \neq 0$, e riconobbe che essa non era integrabile secondo Lebesgue.

Il problema delle primitive

Tuttavia una risposta completa al problema dell'esistenza di primitive venne trovata introducendo le funzioni *assolutamente continue*. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice assolutamente continua se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \varepsilon$$

per ogni successione finita $([x_i, x_{i+1}])_{i=0,\dots,n-1}$ di intervalli a due a due disgiunti tali che

$$\sum_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| < \delta \ .$$

Il problema delle primitive

Si hanno i seguenti risultati:

- Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua, allora
$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)\ ;$$
- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata e se esiste $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $F' = f$ in tutto $[a, b]$; allora
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\ .$$

Anche se tali risultati sono migliori rispetto a quelli che si possono ottenere con la teoria dell'integrazione di Riemann, essi non risolvono completamente il problema del calcolo delle primitive, in quanto non consentono di rispondere in generale al problema di trovare una primitiva di una qualsiasi funzione assegnata.

L'integrale di Denjoy

Quindi neanche l'integrale di Lebesgue forniva un'operazione inversa a quella di derivazione.
Il problema del calcolo delle primitive presentava notevoli difficoltà in quanto anche supposto che una funzione f fosse la derivata di una funzione F, il fatto che f potesse non essere integrabile non consentiva di calcolare gli incrementi $F(b) - F(a)$ mediante un'integrazione.
Il problema è stato risolto da A. Denjoy nel 1912 costruendo dapprima un integrale speciale ("integrale di Denjoy in senso ristretto") che generalizzava quello di Lebesgue.
Successivamente, nel 1916 Denjoy e A.Ya. Khinchin costruirono un integrale ancora più generale ("integrale di Denjoy in senso ampio") utilizzando un opportuno concetto di derivabilità approssimata.
In questo modo è stata costruita un'operazione che forniva esattamente l'inversa di quella di derivazione.

L'integrale di Perron

Su questa linea, è necessario citare anche l'opera di Oskar Perron (1880-1975), che costruì un integrale equivalente a quello di Denjoy in senso ristretto.
La sua definizione non richiedeva la teoria della misura ed era basata ancora sull'idea di approssimare dal basso e dall'alto.
Il punto di partenza è la definizione di derivata inferiore

$$\underline{D}f(x_0) := \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} ,$$

e superiore

$$\overline{D}f(x_0) := \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Tali derivate possono essere anche infinite.

L'integrale di Perron

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; una funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice *funzione minore* (rispettivamente, *maggiore*) di f se

- φ è limitata e continua;
- $\varphi(a) = 0$;
- Per ogni $x \in [a,b]$, risulta $\overline{D}\varphi(x) \neq +\infty$ (rispettivamente, $\underline{D}\varphi(x) \neq -\infty$);
- Per ogni $x \in [a,b]$, risulta $\overline{D}\varphi(x) \leq f(x)$ (rispettivamente, $\underline{D}\varphi(x) \geq f(x)$).

Si dimostra che se φ è una funzione minore di f e se ψ è una funzione maggiore di f, allora $\varphi \leq \psi$ e inoltre $\psi - \varphi$ è crescente. Tuttavia non tutte le funzioni sono dotate di funzioni minori e maggiori.

L'integrale di Perron

Se una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è dotata di funzioni minori e maggiori, si possono definire l'integrale inferiore di Perron

$$(P)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \Phi(b)\ ,$$

dove

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(x) \mid \varphi \text{ funzione minore di } f\}\ ,$$

e l'integrale superiore di Perron

$$(P)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \Psi(b)\ ,$$

dove

$$\Psi(x) = \inf\{\psi(x) \mid \psi \text{ funzione maggiore di } f\}\ .$$

L'integrale di Perron

Risulta sempre

$$(P)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq (P)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\ .$$

Una funzione si dice integrabile secondo Perron se è dotata di funzioni minori e maggiori e se risulta

$$(P)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (P)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\ .$$

Si può dimostrare che se una funzione è integrabile secondo Lebesgue essa lo è anche secondo Perron ed i due integrali coincidono. Se la funzione è limitata vale anche il viceversa. Inoltre l'integrale di Perron include anche quello improprio di Riemann (e quindi è più generale dell'integrale di Lebesgue).

L'integrale di Riemann-Stieltjes

Oltre agli integrali di Denjoy e Perron precedentemente descritti, bisogna tener presente anche l'opera di Vitali e di Young che nel 1904 formularono indipendentemente una definizione di misura analoga a quella di Lebesgue. Per brevità non ci si sofferma su tali contributi.

Alcuni passi in avanti sono dovuti all'opera di Thomas Jan Stieltjes (1856–1894). La sua osservazione principale riguardava il fatto che nella definizione di integrale secondo Riemann di una funzione continua era possibile utilizzare gli incrementi di una funzione crescente al posto della usuale misura reale.

Pertanto, le somme inferiori e superiori erano sostituite da

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(g(x_{i+1}) - g(x_i)) \,, \quad \sum_{i=0}^{n-1} M_i(g(x_{i+1}) - g(x_i)) \,.$$

L'integrale di Riemann-Stieltjes

Teorie dell'integrazione
M. Campiti
Il periodo precedente a Riemann
Il periodo medievale
Il XXVII secolo
Cavalieri
Leibnitz e Newton
L'integrale di Riemann
Formule di quadratura
L'integrale di Lebesgue
Teorie moderne dell'integrale

L'integrale così ottenuto è il noto integrale di Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)\ .$$

La definizione precedente può essere estesa al caso in cui la funzione g è a variazione limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq M$$

per ogni suddivisione $\{x_0, \ldots, x_n\}$ di $[a, b]$, in quanto tali funzioni sono differenza di funzioni crescenti.

L'integrale di Riemann-Stieltjes

Pertanto, l'integrale di f viene effettuato rispetto ad una distribuzione positiva di massa, e i punti di discontinuità di g corrispondono a masse finite concentrate in un punto. Tale tipo di integrazione risulta di particolare importanza nella teoria moderna del potenziale, ad esempio per quanto riguarda la rappresentazione integrale delle funzioni armoniche (integrale di Poisson).
L'opera di Stieltjes apre la strada anche all'approccio moderno dell'integrale dal punto di vista analitico e dell'analisi funzionale.
Successivamente, è stata elaborata anche una teoria dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes.

Anche Radon e Fréchet diedero un contributo rilevante allo sviluppo della teoria dell'integrazione, ma per brevità ne viene omessa la descrizione.

La concezione descrittiva e costruttiva

Considerazioni aggiuntive sull'integrale di Lebesgue

Il periodo in cui era incentrato il dibattito sull'integrazione era anche quello in cui venivano discussi i fondamenti della matematica. Secondo Lebesgue, vi era una distinzione tra definizioni *costruttive* e *descrittive*. Una definizione costruttiva indica le operazioni da effettuare per arrivare al concetto (tali erano, ad esempio, le definizioni di integrale di Riemann e di Lebesgue). Una definizione descrittiva invece caratterizza il concetto da introdurre mediante il verificarsi o meno di certe proprietà (ad esempio, la nozione di primitiva).

Nel metodo descrittivo gli assiomi devono essere consistenti e nel metodo costruttivo le operazioni da effettuare devono essere possibili.

Vista la definizione descrittiva di primitiva, Lebesgue diede anche una definizione descrittiva di integrale.

La concezione descrittiva e costruttiva

L'idea di Lebesgue era che per integrale si dovesse intendere una qualsiasi funzione che ad ogni funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ facesse corrispondere un numero reale $\int_a^b f(x)\,dx$ (dipendente da a, b ed f) verificante le seguenti condizioni:

1. Per ogni $a, b, h \in \mathbb{R}$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx \,;$$
2. Per ogni $c \in [a, b]$
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0 \,;$$
3. $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \,;$$

La concezione descrittiva e costruttiva

4. Se $f \geq 0$ e $a \leq b$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,;$$

5. $\displaystyle\int_0^1 1\,dx = 1\,;$

6. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente (cioè $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$) di funzioni limitate in $[a,b]$ convergente puntualmente verso una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

La concezione descrittiva e costruttiva

Lebesgue aveva dimostrato l'indipendenza dei primi cinque assiomi, ma fu Stefan Banach (1892–1945) a risolvere completamente il problema. Banach dimostrò che era possibile associare ad ogni funzione limitata su un intervallo limitato un numero soddisfacente le condizioni 1.–5. e che nel caso in cui la funzione fosse integrabile secondo Riemann, allora tale numero doveva necessariamente coincidere con l'integrale di Riemann. Ciò invece non accadeva necessariamente per le funzioni integrabili secondo Lebesgue e quindi il sesto assioma doveva essere indipendente dagli altri.

La concezione descrittiva e costruttiva

A tale concezione descrittiva si opponeva decisamente Borel che riteneva che le definizioni dovessero consentire un calcolo effettivo (essere calcolabili). Secondo Borel, un numero reale $r \in \mathbb{R}$ è calcolabile se per ogni $\varepsilon > 0$ si può effettivamente indicare un numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ tale che $|q - r| < \varepsilon$; inoltre una funzione è calcolabile se il suo valore è calcolabile in ogni punto calcolabile in cui è definita.

Da questo punto di vista solamente funzioni continue (almeno nei punti calcolabili) avevano significato.

Una delle obiezioni a questa concezione era il fatto che alcuni numeri reali, come ad esempio la costante di Eulero

$$\gamma := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

non potevano essere definiti.

L'integrale come funzionale lineare

Dopo le generalizzazioni di Denjoy e Perron e l'opera di Stieltjes, la teoria dell'integrazione subì la tendenza generale del periodo di affermare metodi algebrici nell'analisi. Questo anche a causa del teorema di Weierstrass sull'approssimazione di funzioni continue mediante polinomi ed alla successiva generalizzazione fornita dal teorema di Stone-Weierstrass (una sottoalgebra di $C(X)$ con X compatto che contiene le costanti e separa i punti di X è densa in $C(X)$). Tali risultati spinsero verso l'approfondimento della struttura algebrica dello spazio $C(X)$.

Inoltre la definizione descrittiva dell'integrale data da Lebesgue condusse verso la moderna visione dell'integrale definito come *funzionale lineare*.

L'introduzione dei funzionali lineari

La nozione di funzionale è stata introdotta da Volterra (il termine "funzionale" è stato tuttavia utilizzato per la prima volta da Jacques Hadamard (1865–1963)). Lo studio dei funzionali rappresenta uno degli obiettivi principali dell'Analisi Funzionale.

Volterra introdusse i funzionali partendo da considerazioni sul calcolo delle variazioni; i funzionali da lui utilizzati non erano necessariamente lineari e furono utilizzati prevalentemente nella teoria delle equazioni integrali.

Conviene tuttavia utilizzare la definizione di funzionale lineare che si è affermata nella definizione moderna di integrale. Sia E uno spazio vettoriale reale. Un funzionale lineare è una funzione $T : E \to \mathbb{R}$ tale che

- Per ogni $x, y \in E$, si ha $T(x + y) = T(x) + T(y)$;
- Per ogni $x \in E$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

L'introduzione dei funzionali lineari

Se $(E, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato ha senso parlare di funzionali lineari continui; essi sono caratterizzati dal fatto che esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$|T(x)| \leq M \|x\|$$

per ogni $x \in E$.

Un esempio di funzionale lineare continuo è la funzione

$$f \mapsto \int_0^1 f(x)\, dx$$

sullo spazio $L^1(0,1)$ delle funzioni integrabili secondo Lebesgue sull'intervallo $[0,1]$.

L'introduzione dei funzionali lineari

Un contributo determinante alla rappresentazione dei funzionali lineari è stato dato da Frédéric Riesz (1880–1956) nel 1909, utilizzando l'integrale di Stieltjes.
Il *teorema di rappresentazione di Riesz* afferma che ogni funzionale lineare continuo $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ ha la forma di un integrale di Stieltjes, cioè esiste una funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ a variazione limitata tale che, per ogni $f \in C([0,1])$,

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\, dg(x) \, .$$

Tale risultato ha dato un impulso notevole alla concezione dell'integrale come funzionale lineare continuo, anche in vista del fatto che sia l'integrale di Riemann che quello di Lebesgue si presentavano come tali.

L'integrale di N. Bourbaki

Nel famoso trattato sulla teoria dell'integrazione, il gruppo di matematici N. Bourbaki ha introdotto la seguente definizione.

Sia X uno spazio metrico localmente compatto (in cui cioè, le sfere sono compatte) e sia $K(X)$ lo spazio delle funzioni reali continue in X aventi supporto compatto (il supporto di una funzione è il più piccolo insieme chiuso nel cui complementare f si annulla e quindi è la chiusura dell'insieme in cui f non si annulla). Tale spazio risulta normato con la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \, .$$

L'integrale di N. Bourbaki

Una misura (integrale) μ è un funzionale lineare su $K(X)$ verificante la seguente condizione:

- *Se A è un sottoinsieme compatto di X, esiste un numero $M_A \geq 0$ tale che, per ogni $f \in K(X)$ avente supporto contenuto in A, risulti*

$$|\mu(f)| \leq M_A \|f\| .$$

Il funzionale μ viene anche denominato *misura di Radon* ed il suo valore in $f \in K(X)$ viene anche denotato con $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ e denominato *μ-integrale di f*.
L'integrale μ si dice limitato se esiste una costante $M \geq 0$ indipendente da A che verifica la condizione precedente per ogni $f \in K(X)$.
Inoltre μ si dice positivo se $\mu(f) \geq 0$ per ogni $f \in K(X)$ positiva.

L'integrale di N. Bourbaki

Per quanto riguarda le funzioni a supporto compatto, tale tipo di integrale comprende quello di Riemann, di Lebesgue e di Stieltjes su $K(X)$ considerando opportuni X e μ.
Altri esempi sono le cosiddette *misure discrete*

$$\mu(f) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n f(x_n) \;, \quad f \in K(X) \;,$$

dove $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente di numeri reali e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di X.

L'integrale di N. Bourbaki

Il problema che si pone è quello di estendere l'integrale ad una classe più ampia di quella delle funzioni continue a supporto compatto.
Ciò viene realizzato considerando l'integrale superiore μ^* definito come segue. Innanzitutto si osserva che ogni integrale μ può essere rappresentato come differenza di due integrali positivi, considerando $\mu^+ := \sup\{\mu, 0\}$ e $\mu^- := \sup\{-\mu, 0\}$ dove, per ogni $f \in K(X)$ positiva e tale che $f = \sup\{g \in K(X) \mid 0 \le g \le f\}$, si pone

$$\int f d\mu^+ := \sup\left\{\int g\, d\mu \mid g \in K(X),\ 0 \le g \le f\right\} ,$$

e analogamente

$$\int f d\mu^- := \sup\left\{-\int g\, d\mu \mid g \in K(X),\ 0 \le -g \le f\right\} .$$

L'integrale di N. Bourbaki

Se f ha segno arbitrario si scrive $f = f^+ - f^-$ con $f^+ := \sup\{f, 0\}$ e $f^- := \sup\{-f, 0\}$ e se $\mu^*(f^+)$ e $\mu^*(f^-)$ sono entrambi finiti si pone $\mu^*(f) := \mu^*(f^+) - \mu^*(f^-)$.
Lo spazio delle funzioni per cui l'integrale superiore è finito può essere munito della nuova norma

$$\|f\| := \mu^*(f)$$

e la chiusura di $K(X)$ rispetto a questa nuova norma costituisce lo spazio delle funzioni μ-integrabili.
In questo modo è possibile ottenere la classe delle funzioni integrabili secondo Lebesgue (per un'opportuna μ), ma anche classi più generali di integrali. La teoria degli integrali impropri di Riemann, che tuttavia non verifica alcune importanti proprietà, non risulta però inclusa in tale tipo di integrale.

L'integrale di N. Bourbaki

La teoria dell'integrazione risulta in questo caso prioritaria rispetto a quella della misura. La definizione di misura è infatti conseguente alla definizione di integrale. Se A è un sottoinsieme di X, si dice che A è μ-misurabile se la funzione caratteristica 1_A di A è μ-integrabile e in tal caso la misura di A viene posta uguale all'integrale di 1_A; si ricorda che

$$1_A(x) := \begin{cases} 1\,, & x \in A\,, \\ 0\,, & x \in X \setminus A\,. \end{cases}$$

Quindi $\mu(A) := \int_X 1_A(x)\, d\mu(x)$ se 1_A è μ-integrabile.

Successive generalizzazioni

Alcuni matematici (Bochner e Pettis) hanno studiato la possibilità di introdurre l'integrale di funzioni a valori in uno spazio di Banach; in tal caso l'integrale risulta essere un elemento dello spazio di Banach e non necessariamente un numero reale.
Altre generalizzazioni dell'integrale, come quelle di Cesaro-Perron e di Burkill, per brevità non vengono approfondite.

Insiemi misurabili secondo Carathéodory

Un contributo importante alla teoria astratta della misura è stato dato da Constantin Carathéodory (1873–1950).
Si consideri uno spazio metrico (X, d). Una misura esterna su X è una funzione reale Γ definita sui sottoinsiemi di X e verificante le seguenti proprietà:

- Se $A \subset B$, allora $\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$;
- Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi di X, si ha
$$\Gamma\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma(A_n) \;;$$
- Se A e B sono sottoinsiemi di X tali che la loro distanza $d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A\,,\ \ y \in B\}$ è strettamente positiva, allora $\Gamma(A \cup B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$.

Insiemi misurabili secondo Carathéodory

Una volta definita la misura esterna, bisogna specificare cosa intendere per insieme misurabile. La definizione di Carathéodory prevedeva la seguente condizione

- Un sottoinsieme A di X si dice Γ-misurabile se

$$\Gamma(B) = \Gamma(B \cap A) + \Gamma(B \cap (X \setminus A))$$

  per ogni sottoinsieme B di X.

Denotata con $\mathcal{C}_X$ la classe degli insiemi misurabili secondo Carathéodory, si verifica che Γ è completamente additiva su $\mathcal{C}_X$ e verifica le proprietà di misura. Inoltre, $\mathcal{C}_X$ contiene gli insiemi misurabili secondo Borel.

La misura di Haar

Un ultimo aspetto che si vuole affrontare riguarda la misura di Haar ed il corrispondente integrale. La teoria di Alfred Haar (1885–1933) ha consentito di introdurre una teoria della misura e dell'integrazione su gruppi topologici.

Un gruppo topologico è un gruppo dotato di una struttura topologica, rispetto alla quale le operazioni di gruppo (cioè la moltiplicazione e l'inverso) sono funzioni continue (equivalentemente, la funzione $f(x, y) = xy^{-1}$ è continua). Un gruppo topologico è invariante per traslazioni, cioè un insieme V aperto se e solo se lo sono tutti i suoi traslati aV con $a \in G$.

La misura di Haar

Sia $K(G)$ lo spazio delle funzioni continue e a supporto compatto.
Per ogni $y \in G$ ed $f \in K(G)$, la funzione $fy \in K(G)$ è definita ponendo

$$(fy)(x) := f(yx) , \qquad x \in G .$$

Se μ è una misura su G, per ogni $y \in G$ si definisce la misura $y\mu$ ponendo

$$(y\mu)(f) := \mu(fy) , \qquad f \in K(G)$$

Una misura $\mu \neq 0$ si dice misura di Haar invariante a sinistra se $y\mu = \mu$ per ogni $y \in G$.

La misura di Haar

L'esistenza di una tale misura su ogni gruppo localmente compatto e a base numerabile è stata dimostrata da Haar nel 1933.
Nel 1934 J. Von Neumann ha generalizzato tale risultato ad ogni gruppo localmente compatto. Inoltre ha anche dimostrato che una tale misura è unica a meno di una costante in gruppi compatti.

F I N E