SISTEMI LINEARI, MATRICI E METODI DI RISOLUZIONE

Un sistema di equazioni lineari in m equazioni e n incognite è del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

e in forma matriciale equivale all'equazione:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \text{A X = B}$$

Il vettore **X** , o vettore delle incognite, se esiste, si dice <u>soluzione del sistema</u>.

La matrice dei coefficienti $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ è detta **matrice incompleta.**

La matrice comprendente coefficienti e termini noti $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$

è detta **matrice completa.**

Def. Un sistema si dice **compatibile** se ammette una o infinite soluzioni, **incompatibile** se non ammette soluzioni.

Def. Un sistema incompatibile si dice anche **impossibile**, un sistema compatibile può essere **determinato** se ha una sola soluzione, **indeterminato** se ammette infinite soluzioni.

<u>CASO PARTICOLARE: sistemi in n equazioni e n incognite.</u>

In questo caso la matrice dei coefficienti è una matrice quadrata, di cui si può calcolare il determinante col metodo che si preferisce (metodo generale, Sarrus se è 3 x 3, metodo di Gauss di riduzione a scala).
Si danno due casi:

D = 0 , il sistema è impossibile o indeterminato
(rimandiamo la discussione di questo caso, che sarà trattato col teorema di Rouché-Capelli)
$D \neq 0$, il sistema è determinato e la soluzione si può ricavare con vari metodi:

- CRAMER
- MATRICE INVERSA
- GAUSS

METODO DI CRAMER

Ogni incognita si può ricavare come rapporto di due determinanti.

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Dove $D \neq 0$ è il determinante della matrice dei coefficienti e D_1, D_2 … sono i determinanti ottenuti, a partire da D, sostituendo alla colonna corrispondente all'incognita cercata la colonna dei termini noti.

METODO DELLA MATRICE INVERSA

Il sistema scritto in forma matriciale è: $A\,X = B$.
Essendo $D = \det A \neq 0$, esiste la matrice A^{-1} inversa di A.
Moltiplicando a sinistra per A^{-1}, si ottiene: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$
da cui: $X = A^{-1} \cdot B$.
Calcolando il prodotto delle matrici si trova immediatamente il vettore soluzione.

METODO DI GAUSS

Il metodo di Gauss, a differenza dei due precedenti, potrà essere applicato anche a sistemi di m equazioni in n incognite. Consiste nella trasformazione del sistema (o della matrice completa associata) a un sistema a scala, cioè un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\quad a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

dove i coefficienti ovviamente non saranno più quelli del sistema iniziale e nell'ultima equazione comparirà (nel migliore dei casi) solo più una incognita.
Si può così ricavare l'incognita x_n dall'ultima equazione e, per sostituzione, una alla volta, tutte le altre.
I primi coefficienti non nulli su ogni riga sono detti **PIVOT**.

La trasformazione del sistema viene attuata tramite le **"mosse di Gauss":**

- scambio tra loro di due equazioni
- sostituzione di una equazione con un suo multiplo non nullo
- sostituzione di un'equazione con la combinazione lineare dell'equazione stessa con un'altra equazione del sistema.

In termini matriciali, ciò equivale a:

- scambio di due righe della matrice completa
- sostituzione di una riga con multiplo non nullo della riga
- sostituzione di una riga con la combinazione lineare della riga stessa con un'altra riga della matrice.

Si noti che, tramite queste operazioni, il determinante della matrice completa e incompleta si modificano, ma non si modifica la eventuale soluzione del sistema. E' sufficiente, ad esempio, pensare alle soluzioni ottenute col metodo di Cramer; entrambi i determinanti a numeratore e denominatore risulteranno moltiplicati per uno stesso fattore a causa dalle varie mosse ma daranno sempre lo stesso rapporto.

CASO GENERALE

Il metodo di Gauss è particolarmente opportuno nella trattazione dei sistemi di m equazioni in n incognite. In questo caso si opera sulle matrici in modo da poter applicare in modo semplice il:

TEOREMA DI ROUCHE'-CAPELLI

Un sistema è compatibile se il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta. Quindi:

-se il rango della matrice incompleta è minore di quello della matrice completa, il sistema è impossibile;

-se i due ranghi sono entrambi uguali a R e R è uguale al numero n di incognite, il sistema è determinato, cioè ha un'unica soluzione X;

-se i due ranghi sono uguali entrambi a R ma R è minore del numero n di incognite, il sistema sarà indeterminato e si avranno ∞^{n-R} soluzioni.

Il confronto tra i ranghi delle due matrici è particolarmente semplice se si riduce la matrice completa in forma triangolare, essendo in tal caso il determinante ottenibile come prodotto degli elementi della diagonale principale.
Facciamo alcuni esempi osservando che vale la seguente regola:

Un sistema lineare a scala o triangolare con m equazioni e R pivot è compatibile se e solo se le ultime m-R componenti del vettore dei termini noti sono nulle.
In tal caso si avranno ∞^{n-R} *soluzioni.*
In particolare se n = R ,il sistema è determinato e la soluzione è unica.

ESEMPIO 1 (numero equazioni = numero incognite)

Supponiamo di avere ridotto, tramite le mosse di Gauss, la matrice completa del sistema a:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & : & -6 \\ 0 & 6 & -18 & : & 36 \\ 0 & 0 & 7 & : & -7 \end{vmatrix}$$

Si vede che il sistema è a n = 3 incognite e il rango della matrice incompleta e della matrice completa è R = 3. Il teorema di R-C prevede quindi un'unica soluzione.
Si noti che infatti ci sono 3 pivot (1, 6, 7) e che la regola su scritta è verificata, in quanto m – R = 0.
Dall'ultima equazione ricavo che $x_3 = -1$ e, sostituendo nelle altre equazioni, trovo le altre incognite.

Consideriamo invece la matrice così modificata:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & : & -6 \\ 0 & 6 & -18 & : & 36 \\ 0 & 0 & 0 & : & -7 \end{vmatrix}$$

In questo caso è facile vedere che il rango della matrice incompleta è 2 , mentre quello della matrice completa è 3. Quindi il sistema è impossibile.
I pivot sono due (1,6), le equazioni 3, m – R = 1, ma l'ultima componente del vettore dei termini noti non è zero. Quindi, secondo la regola dei pivot, il sistema non è compatibile.

Oppure:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & : & -6 \\ 0 & 6 & -18 & : & 36 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{vmatrix}$$

In questo caso, sia utilizzando il teorema di R-C, (rango = 2 per entrambe le matrici), sia utilizzando la regola dei pivot (due pivot, tre equazioni, ultimo termine noto nullo), si trova che il sistema è compatibile e ha $\infty^{n-R} = \infty^1$ soluzioni.

ESEMPIO 2 (numero equazioni > numero incognite)

Supponiamo di avere ridotto tramite le mosse di Gauss la matrice completa del sistema a:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & : & 9 \\ 0 & -7 & : & 7 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{vmatrix}$$

Si vede che il sistema è a n = 2 incognite e il rango della matrice incompleta e della matrice completa è R = 2. Il teorema di R-C prevede quindi un'unica soluzione.
Si noti che infatti ci sono 2 pivot (2, -7) e che la regola su scritta è verificata, in quanto m – R = 1, e l'ultimo dei termini noti è zero.

ESEMPIO 3 (numero equazioni < numero incognite)

Supponiamo di avere ridotto tramite le mosse di Gauss la matrice completa del sistema a:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & : & 1 \\ 0 & 5 & -2 & : & 7 \end{vmatrix}$$

Si vede che il sistema è a n = 3 incognite e il rango della matrice incompleta e della matrice completa è R = 2. Il teorema di R-C prevede quindi $\infty^{n-R} = \infty^1$ soluzioni. (si porrà una delle tre incognite uguale a un parametro k).
I pivot sono due (2, 5), le equazioni sono due, quindi anche secondo la regola dei pivot, il sistema è compatibile e ha $\infty^{n-R} = \infty^1$ soluzioni.

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Def. Un sistema lineare si dice omogeneo se il vettore dei termini noti è il vettore nullo.

E' evidente che un sistema omogeneo ha sempre almeno la soluzione nulla X = 0.

In particolare:

- se D (det. coefficienti) $\neq 0$, il sistema è determinato e ha solo la soluzione nulla
- se D = 0, il sistema ha infinite soluzioni determinabili in generale utilizzando il teorema di R-C e le tecniche su descritte.

Nel caso in cui una riga della matrice dei coefficienti abbia tutti i complementi algebrici diversi da zero, allora le soluzioni sono ∞^1 e si possono ottenere moltiplicando i complementi algebrici per un parametro k.