GUIDA AL RIPASSO ESSENZIALE *Prof.ssa Fabrizia De Bernardi*

Premessa:
Rivedere equazioni e disequazioni in modulo, irrazionali, goniometriche, esponenziali e logaritmiche (e proprietà logaritmi).
Rivedere principali formule goniometriche, teoremi triangoli rettangoli e qualsiasi, formule di superfici e volumi dei solidi principali (cilindro, piramide, cono, sfera). Rivedere elementi base del calcolo combinatorio e della probabilità.

CAMPI DI ESISTENZA

Polinomi sen, cos, arctg radici di indice dispari valore assoluto esponenziali	$\forall x \in \mathbb{R}$
Funzioni fratte	Denominatore ≠ 0 (non maggiore!!)
Radici di indice pari	f(x) ≥ 0
Logaritmo	f(x) > 0
tangente, secante	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
cotangente, cosecante	$x \neq k\pi$
arccos, arcsin	-1 ≤ x ≤ 1

SEGNO DELLE FUNZIONI

Valore assoluto potenze pari arccos radici di indice pari	$\geq 0, \forall x \in C.E$	
esponenziali	$> 0, \forall x \in C.E.$	
Logaritmo naturale o di base >1	≥ 0 per	x ≥ 1
Logaritmo di base <1	≥ 0 per	0 < x ≤ 1
arcsin	≥ 0 per	0 ≤ x ≤ 1
arctg	≥ 0 per	x ≥ 0
Altre funzioni goniometriche...	Dovreste conoscere i grafici...	

LIMITI

Ripassare le **4 definizioni** in particolare →	Seconda definizione: asintoto verticale Terza definizione: asintoto orizzontale
Nel calcolo, prima di procedere in qualche modo, provare sempre a calcolare: non è detto si tratti di una forma indeterminata!	Le forme indeterminate sono: $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞
Se sono nell'intorno dello zero o posso portarmi nell'intorno dello zero, utilizzo le sostituzioni degli **infinitesimi equivalenti** → eventualmente sopprimo infitesimi di ordine superiore	Ripassare limiti fondamentali e infinitesimi equivalenti. E' spesso più semplice utilizzare le sostituzioni piuttosto che il teorema di de L'Hopital.
Se ho a che fare con **infiniti,** sopprimo gli infiniti di ordine inferiore →	Ricordare che all'infinito $\log x < x^c < a^x$ (c > 0)
Se così non si è risolta l'indeterminazione, controllo che il limite sia nella forma 0/0 oppure ∞/∞ e applico il teorema di de L'Hopital (rivedere le ipotesi) →	Derivo sia numeratore sia denominatore. Non confondersi con la derivata del rapporto!
Nelle forme esponenziali indeterminate si può utilizzare	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c}[g(x)\ln f(x)]}$
Nella sola forma 1^∞ si può utilizzare →	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c}[f(x)-1]g(x)}$

ASINTOTI

Asintoto verticale $x = c$ C.E. $x \neq c$	$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$
Asintoto orizzontale $y = l$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$
Asintoto obliquo solo se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $y = mx + q$	$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ $q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

DERIVATA PRIMA

Rivedere la **definizione** come limite del rapporto incrementale	Rivedere il **significato geometrico**
Ripassare tabella **derivate fondamentali** e **regole di derivazione**, in particolare →	Ricordare che qualunque espressione del tipo $\sqrt[n]{f^m(x)} = [f(x)]^{\frac{m}{n}}$ può essere derivata come potenza
Nel caso di funzioni in **valore assoluto**, ridefinisco la funzione e calcolo le derivate nei vari tratti →	Le informazioni che ottengo dallo studio di tali derivate valgono solo nel loro singolo intervallo di definizione!
La derivata della **funzione composta**: *z= f[g(x)]* con *y = g(x)* è *z' = f ' [g (x)] g'(x)* e può essere scritta come →	$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$
La derivata della **funzione inversa** $x = g(y)$ della funzione $y = f(x)$ nel punto $y_0 = f(x_0)$ è → [Rivedere teoremi: - una funzione è invertibile se è biunivoca cioè monotona, ciò si verifica se la f' è sempre > 0 o < 0] - una funzione continua e invertibile è monotona] La funzione può essere invertita a tratti se non lo è nel suo dominio completo.	$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ Stare attenti a non fare confusione con i vari x e y. Ragionare sul fatto che ogni funzione e ogni derivata devono essere calcolate nella variabile indipendente che loro compete, riferita al loro dominio di definizione. [Ex. y = f(x) 1 = e^0 1 è nel codominio x = g(y) 0 = ln 1 1 è nel dominio]
Applicazioni geometriche →	Eq. **retta tangente** in x_0: $y- f(x_0)= f'(x_0)(x -x_0)$
Angolo tra due rette o tra due curve → Se tg > 0 → angolo acuto Se tg < 0 → angolo ottuso (supplementare del precedente)	$tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$
Massimi e minimi	
Se devo studiare l'andamento di una funzione e determinarne massimi e minimi, pongo →	$f'(x) \geq 0$
Se devo determinare dei parametri sapendo che la funzione ha un massimo o un minimo in x_0, pongo (probabilmente in sistema con altre condizioni) →	$f'(x_0) = 0$
Nei **problemi di massimo e minimo** ricordarsi di imporre i limiti per la variabile. Esprimo la grandezza da massimizzare o minimizzare come funzione di x: y = y(x). Derivo e pongo y'(x) ≥ 0. Nello schema finale inserisco il valore trovato e le limitazioni per la variabile.	La variabile deve essere una sola! **tutte le altre grandezze variabili devono essere espresse in funzione della variabile scelta che chiamo x.** Eventualmente calcolo il valore massimo o minimo della grandezza studiata (superficie/volume/…)

CONTINUITA' E DERIVABILITA'

Studio della continuità	**Studio della derivabilità**
Determino il C.E. della funzione f	Determino il C.E. della derivata f'
Se trovo punti esclusi dal C.E. (ex: x ≠ 2, x > 5) calcolo i limiti destro e sinistro di f in tali punti [oppure il solo limite indicato dal C.E. se la funzione esiste solo a destra o solo a sinistra del punto]	Se i punti non inclusi nel C.E. di f' sono punti di continuità per la funzione f, allora calcolo i limiti destro e sinistro di f' in tali punti [oppure il solo limite indicato dal C.E. della funzione se essa esiste solo a destra o solo a sinistra del punto]

Criterio di continuità *Esiste f(c) = l* $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) = l$	**Criterio di derivabilità** *f(x) continua in c* $\lim_{x \to c^-} f'(x) = \lim_{x \to c^+} f'(x) = l$
Discontinuità di prima specie: SALTO	**Punto angoloso**
$\lim_{x \to c^-} f(x) = l; \lim_{x \to c^+} f(x) = m$ *l ≠ m* *salto = |l-m|*	*f(x) continua in c* $\lim_{x \to c^-} f'(x) = l; \lim_{x \to c+} f'(x) = m$
Discontinuità di seconda specie: asintoto verticale x = c	**Cuspide**
$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ Almeno uno dei due limiti destro o sinistro è infinito	*f(x) continua in c* $\lim_{x \to c^-} f'(x) = \pm\infty; \lim_{x \to c+} f'(x) = \mp\infty$
Discontinuità di terza specie o eliminabile	**Flesso a tangente verticale**
$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l$ Posso rendere la funzione continua ridefinendola imponendo *f(c) = l*	*f(x) continua in c* $\lim_{x \to c^-} f'(x) = \pm\infty; \lim_{x \to c+} f'(x) = \pm\infty$

TEOREMI

Funzioni continue su [a,b] chiuso e limitato	**Funzioni continue su [a,b] e derivabili su (a,b)**
Weierstrass Una funzione continua su [a,b] chiuso e limitato ammette massimo e minimo sull'intervallo	**Rolle** (caso particolare di Lagrange) Data una funzione f(x) continua su [a,b] e derivabile su (a,b) con f(a) = f(b) , esiste c appartennte ad (a,b) tale che f'(c) = 0. <u>Significato geometrico</u>: esiste un punto a tangente orizzontale
Esistenza zeri Una funzione continua su [a,b] chiuso e limitato con f(a) ed f(b) di segno discorde si annulla almeno in un punto dell'intervallo. Lo applico per determinare l'esistenza di zeri in casi in cui non sia possibile trovare le soluzioni di un'equazione col calcolo. Verifico le due ipotesi del teorema avendo indivuato un intervallo opportuno. Applico il metodo di bisezione per trovare la soluzione in modo più preciso.	**Lagrange** (caso particolare di Cauchy) Data una funzione f(x) continua su [a,b] e derivabile su (a,b), esiste c appartenente ad (a,b) tale che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ <u>Significato geometrico</u>: esiste un punto in cui la tangente è parallela alla corda che unisce gli estremi. In altre parole, esiste un punto in cui la pendenza della curva è uguale alla pendenza media sull'intervallo. Se il grafico è ad esempio quello di una legge oraria s = s(t), il teorema garantisce che esiste un punto in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità media sull'intervallo.
	Conseguenze Lagrange: ricordare soprattutto (con dimostrazione) se f'(x) >0 su (a,b) → f(x) crescente su (a,b) e viceversa
Darboux-Bolzano Una funzione continua su [a,b] chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra f(a) e f(b). *Corollario: … tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo sull'intervallo*	**Cauchy** Date le funzioni f(x) e g(x) continue su [a,b] e derivabili su (a,b), con g'(x) ≠ 0 in tutto l'intervallo, esiste c appartenente ad (a,b) tale che : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

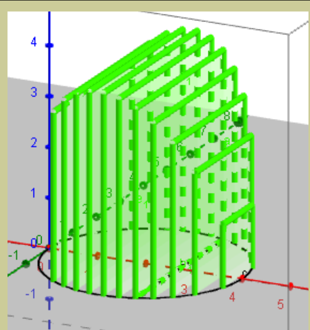
DERIVATA SECONDA

Per studiare la concavità e convessità di una curva e trovarne i flessi, pongo f"(x) ≥ 0	dove la f" >0  dove la f"<0 
Per determinare eventuali parametri sapendo che x_0 è un punto di flesso, pongo →	f"(x_0) = 0

INTEGRALE INDEFINITO

Rivedersi la tabella delle primitive da conoscere a memoria	
Rivedere il foglio con i consigli per l'integrazione e i vari metodi di integrazione, in particolare →	cambiamento del fattore differenziale scomposizione sostituzione regola per parti
Rivedere l'integrazione di funzioni razionali fratte	Δ >, < = 0

INTEGRALE DEFINITO

Una volta risolto l'integrale indefinito è immediato calcolare quello definito MA...	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Nel caso l'integrale non sia parte conclusiva di uno studio di funzione, cioè se la situazione non è nota dal grafico della funzione, **calcolare il campo di esistenza della funzione integranda e verificare se uno degli estremi di integrazione o un altro punto dell'intervallo (a,b) è punto di discontinuità.** In tal caso →	Traccio un grafico approssimato della funzione nell'intervallo (a,b) e verifico se sia il caso di calcolare un **integrale improprio.** Ad esempio, se C.E. x ≠ c, con a<c<b Riscrivo l'integrale come: $\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right]$
Se l'integrale è assegnato con uno o due estremi = ∞, si calcola l'**integrale improprio** mediante limite →	Ad esempio: $\lim_{B \to +\infty} \left[\int_a^B f(x)dx \right]$
Nel caso si calcoli l'integrale mediante metodo di sostituzione, ricordarsi di cambiare anche gli **estremi di integrazione** ricavandoli da t = t(x)	L'integrale definito è un numero e può risultare essere positivo o negativo.
AREE	
Rivedere foglio scansionato con i vari casi.	Sempre consigliabile tracciare un grafico anche approssimato della/e funzione/i da integrare per potere procedere nel modo corretto.
L'area deve essere positiva. Pertanto bisogna inserire un **valore assoluto**.	Dal grafico della funzione si vedrà se è necessario calcolare un integrale improprio mediante limite.
VOLUMI di rotazione	
Attorno asse x	$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$
Attorno asse y (determino x = g(y) funzione inversa)	$V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} g^2(y)dy$ o col metodo dei gusci cilindrici $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$
Se vi sono più funzioni sovrapposte, fare un disegno chiaro da cui dedurre quali parti vadano sottratte dal volume più esterno	
Altri Volumi	
Si chiede in genere di costruire un solido con base un'area sul piano (x,y). Il solido è dato dalla somma di infinite figure piane (quadrati, rettangoli, triangoli, segmenti parabolici…) con basi segmenti generalmente paralleli all'asse y. Se non è già assegnata dal testo, si determina l'area A(x) di ogni figura piana perpendicolare all'asse x. Il volume è quindi: $V = \int_a^b A(x)dx$	

TEOREMI

TEOREMA DELLA MEDIA	Significato geometrico
f(x) continua (quindi integrabile) sull'intervallo (a,b). Esiste x_1 tale che: $$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(x_1)$$ dove x_1 appartiene all'intervallo (a,b) e $f(x_1)$ è il **valore medio** della funzione f(x) sull'intervallo	L'area del trapezoide equivale all'area di un rettangolo di base l'intervallo (a,b) e altezza il valore medio della funzione sull'intervallo. Utilizzo tale teorema per calcolare il valore medio della funzione rappresentata nel grafico y = f(x). Tale valore è sempre un'area diviso l'intervallo di base. L'area può essere calcolata mediante integrale definito o in altri modi se si tratta di figura geometricamente semplice.
TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO	
Se la funzione integranda f(x) è continua, allora la funzione integrale F(x) è derivabile e **F'(x) = f(x)** per ogni x. Cioè: $$D\int_a^x f(t)dt=f(x)$$	Il teorema può essere utile nel caso si debba calcolare la derivata di una funzione integrale, ad esempio per applicare la regola di de L'Hopital. Ricordare che: $$D\int_a^{g(x)} f(t)dt=f(x)\cdot g'(x)$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Rivedere gli esempi svolti	
$y' = f(x)$ → $\quad \dfrac{dy}{dx}=f(x)$ si tratta di una **semplice integrazione** dove al più si chiede di trovare un integrale particolare, cioè determinare c assegnata una condizione iniziale →	$$\int dy=\int f(x)dx=F(x)+c$$
A variabili separabili $g(y)y'=f(x)$ → $\quad g(y)dy=f(x)dx$	$$\int g(y)dy=\int f(x)dx$$ Integro e trovo la famiglia di soluzioni. Se ho la condizione iniziale determino c e l'integrale particolare. Il **teorema di Cauchy** garantisce l'esistenza e unicità della soluzione particolare, nell'intorno del punto in cui è assegnata la condizione iniziale, purché in tale intorno la funzione sia continua.
Applicazioni alla fisica	
Ricordare che in generale quando si parla di **rapidità di variazione** di una grandezza y si intende dy/dt. **Esempi di applicazione** →	Velocità: $\quad v(t)=\dfrac{ds}{dt}$ quindi $\quad Spercorso=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
Portata volumica: $\quad P(t)=\dfrac{dV}{dt}$ quindi $\quad V=\int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$	Intensità di corrente: $\quad i(t)=\dfrac{dq}{dt}$ quindi $\quad Q=\int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$
Lavoro di una forza variabile: $$L=\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$	In una dimensione $$F(x)=-\frac{dU}{dx}$$ dove U è l'energia potenziale