TEORIA DELLA RELATIVITA': appunti

Introduzione

La teoria della Relatività è una delle teorie fisiche che rivoluzionarono la fisica e la visione del mondo a partire dal primo Novecento, in quel periodo che è stato chiamato “I trent'anni che sconvolsero la fisica”. Tale periodo è all'incirca compreso tra il 1900 (pubblicazione da parte di Planck dell'ipotesi quantistica riguardo l'emissione di energia da una cavità radiante) al 1927 (Principio di indeterminazione di Heisenberg e inizio degli sviluppi della fisica quantistica in una direzione sempre più distante dalla visione classica).
La Relatività Ristretta si occupa di oggetti in moto con velocità molto alte e quindi di alte energie; la Fisica Quantistica opera a livello atomico e subatomico, la Relatività Generale descrive la struttura dell'universo su larga scala. Si tratta di situazioni non esperibili nella vita quotidiana e per questo a volte i risultati trovati urtano contro il senso comune. Tutte queste teorie hanno mostrato nei diversi ambiti citati i limiti della meccanica newtoniana, che rimane comunque una teoria valida nelle situazioni normalmente trattate nella vita quotidiana: il moto di una palla da tennis, ecc. fino alla scala del sistema solare, con buona approssimazione.
La teoria della Relatività si costituisce in due momenti successivi:
- la Relatività Ristretta o Speciale (1905) (RR)
- la Relatività Generale (1915-16) (RG)
La Relatività Ristretta nasce dall'incompatibilità tra la teoria elettromagnetica classica (equazioni di Maxwell e forza di Lorentz) e la meccanica classica newtoniana.
Molti fisici e matematici, tra fine Ottocento e inizio Novecento, erano al lavoro per risolvere tale incompatibilità e alcuni risultati erano già stati trovati. Questi, però, non si inquadravano in una teoria unitaria e coerente ed apparivano perlopiù come aggiustamenti matematici ad hoc escogitati per risolvere alcune incongruenze. Einstein seppe ritrovare tali risultati partendo da postulati precisi, costruendo una teoria coerente che ne dava piena giustificazione dal punto di vista fisico. Si ipotizza comunque che, se non ci fosse stato Einstein, qualcun altro avrebbe potuto giungere agli stessi risultati nel giro di qualche anno. La teoria era “nell'aria”.
La Relatività Generale è invece opera di un solo uomo e nasce da esigenze filosofico-concettuali ed estetiche profondamente radicate, che sempre furono alla base della speculazione einsteniana.
Essa è una generalizzazione della RR ottenuta estendendo il principio di relatività a tutti i sistemi di riferimento, anche accelerati; è una teoria generale della gravitazione. Ancora oggi è la teoria della gravitazione migliore a nostra disposizione. E' stata confermata a settembre 2015 dall'esperimento che ha rivelato le onde gravitazionali generate dalla fusione di due buchi neri.
Einstein nel 1905 ha 26 anni e lavora come impiegato all'Ufficio Brevetti di Berna.
Quali sono le conoscenze fisiche in quel momento?
Nel 1865 Maxwell aveva pubblicato le sue equazioni, cioè la teoria del campo elettromagnetico, prevedendo il propagarsi di questo tramite onde la cui velocità risultò pari a quella della luce.
Egli aveva quindi definitivamente stabilito che la luce è un'onda elettromagnetica, realizzando una prima grande unificazione tra elettromagnetismo e ottica.
Vedremo come proprio da questi assunti nascano le incompatibilità con la meccanica classica.
Nel 1887 Hertz aveva verificato sperimentalmente l'esistenza delle onde elettromagnetiche.
Nel 1896 Becquerel aveva scoperto la radioattività dando il via agli studi sui decadimenti nucleari.
Nel 1897 J.J.Thomson aveva scoperto la particella *elettrone*, dando inizio alla fisica atomica.
Nel 1900 Planck aveva ipotizzato la quantizzazione dell'energia.
Millikan tra il 1904 e il 1913 realizza la lunga serie di esperimenti mirati a misurare la carica dell'elettrone.
Nel 1906 Rutherford scopre il nucleo atomico.
Sono anni di grande fervore nel mondo scientifico; alcuni pensano che ormai la fisica sia vicina ad aver compreso tutto ciò che c'è da comprendere riguardo la descrizione del mondo fenomenico, ma nei primi anni del '900 molte certezze crolleranno e la visione fisica del mondo sarà sovvertita.
Einstein darà contributi fondamentali in vari ambiti. Nel 1905 (il suo “annus mirabilis”) pubblica cinque articoli fondamentali, tra cui quello sull'elettrodinamica dei corpi in movimento (nascita della RR) e quello sulla teoria dei fotoni (contributo alla nascita della fisica quantistica).

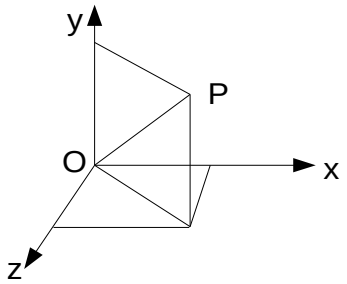
Spazio assoluto e spazio relativo

La previsione teorica e la verifica sperimentale delle onde elettromagnetiche e della loro velocità riporta in auge il concetto di “etere”, che, avendo attraversato tutta la filosofia dai Greci in poi, con significati diversi, era stato riproposto in ambito fisico a inizio Ottocento da Fresnel e Young, sostenitori della teoria ondulatoria della luce, come “etere luminifero”.
Se la luce è un'onda, deve esistere un mezzo attraverso il quale si propaghi.
Fino ad allora erano note solo onde materiali, onde che potevano cioè propagarsi solo in presenza di un mezzo materiale, si pensi al suono.
Quindi l'etere è necessario per spiegare la propagazione della luce, ma assume anche un altro significato più profondo per soddisfare un'altra esigenza: essendo la velocità delle onde elettromagnetiche, teoricamente prevista da Maxwell, solo funzione delle costanti dielettrica e magnetica, la maggior parte dei fisici, inizia a ritenere che tale valore sia attribuibile alle onde elettromagnetiche solo in un riferimento preciso, quello appunto dell'etere, che diventa quindi il riferimento privilegiato, lo spazio assoluto newtoniano. Si tenterà quindi di misurare la velocità della Terra rispetto a questo riferimento privilegiato, come vedremo.
La fisica classica galileiana prevede il principio di additività delle velocità; quindi quel valore della velocità della luce può restare costante, dal punto di vista classico, solo in un riferimento preso come assoluto. In altri riferimenti, in moto rispetto all'etere, la velocità c dovrebbe sommarsi in qualche modo con la velocità del riferimento rispetto all'etere stesso.
Questa idea di riferimento assoluto si inscrive nella visione filosofica di spazio assoluto.
Un po' schematicamente:

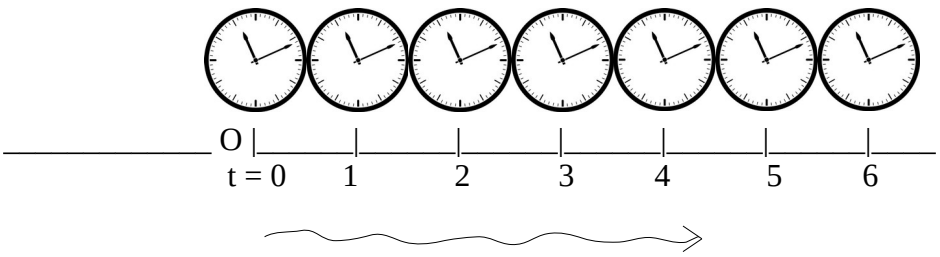
SPAZIO ASSOLUTO (Aristotele, Scolastica medievale, Newton)	SPAZIO RELATIVO (Cartesio, Leibniz, Mach, Einstein)
Lo spazio è un insieme di <u>punti</u>, una sorta di palcoscenico fisso in cui avvengono eventi. E' possibile stabilire la posizione di un punto a prescindere dalla presenza di altri oggetti. Le leggi fisiche sono <u>relative</u> al sistema di riferimento; una legge fisica può essere vera in un riferimento e non è detto che lo sia in altri.	Lo spazio è una struttura fatta di <u>relazioni tra punti</u>. Non si può attribuire una posizione ad un oggetto in assenza di altri oggetti a cui riferirlo. Le leggi fisiche sono <u>assolute:</u> se una legge fisica è vera in un riferimento deve esserlo anche negli altri.

SISTEMA DI RIFERIMENTO E SISTEMA DI COORDINATE
Un sistema di riferimento è un sistema di corpi reciprocamente fermi dotato di un sistema di orologi tutti identici e sincronizzati disposti in tutti i punti del riferimento (orologi standard).
Un sistema di coordinate è un qualunque modo di associare ad un *evento* (fenomeno fisico elementare che accade in un certo punto e in un certo istante) una quaterna di misure, ad esempio, se utilizzo coordinate cartesiane: (x, y, z, t).

<u>Principio del PHOTO CLOCK</u>
Fissato un sistema di riferimento e un sistema di coordinate cartesiane ad esso abbinate, la posizione spaziale del punto sarà data da (x, y, z). Si tratta di definire meglio come misurare i tempi.

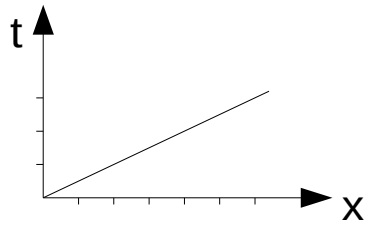


Immagino di avere sistemato un orologio in ogni punto del sistema. Tutti gli orologi devono essere fermi. Come sincronizzare gli orologi?
Per semplicità consideriamo un sistema limitato all'asse x.



L'osservatore O invia all'istante 0 del suo orologio un raggio di luce. Ad ogni orologio è attribuita una posizione precisa: ad esempio l'orologio 4 è nella posizione +4 unità. Nell'istante in cui l'orologio 4 vede passare il fotone, sa esattamente come deve regolare il suo tempo: infatti se la velocità della luce è c, il fotone, partito all'istante 0 da O passerà davanti all'orologio 4 nell'istante t = 4/c.
In questo modo posso sincronizzare tutti gli orologi senza spostarli.
Come vedremo, infatti, il muovere gli orologi causerebbe problemi.
Una volta sincronizzati gli orologi, si applica il principio del PHOTO CLOCK.
Si immagina che ogni orologio sia una sorta di macchina fotografica. Quando un evento accade in un punto, ad esempio il passaggio di una particella, l'orologio associato a quel punto scatta una fotografia immortalando l'istante in cui avviene l'evento e il punto in cui avviene.
In questo modo l'osservatore può in seguito raccogliere tutte le foto scattate al passaggio della particella e costruire un diagramma spazio-temporale, che descriva il moto della particella.
La luce impiegherebbe infatti un certo tempo ad arrivare da un certo punto P ad O, e viceversa non sarebbe opportuno che O spostasse l'orologio seguendo la particella, perché un orologio in moto è diverso da uno fermo. Il Photo Clock consente una rilevazione corretta dei tempi.
Se continuiamo a limitarci all'asse x, avremo ad esempio, la tabella:

t	x
0	0
1	2
2	4
3	6



e il grafico

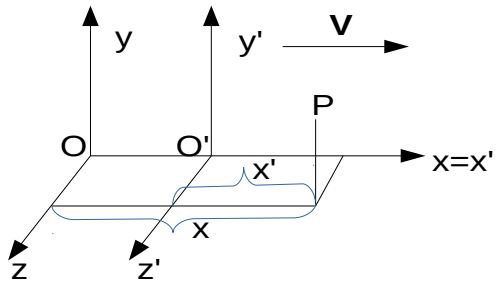
Concludendo, un sistema di riferimento è costituito da una terna di assi e una griglia di orologi standard sincronizzati.

CAMBIO DI SISTEMA DI RIFERIMENTO

Considerato un evento, esso sarà associato, in un sistema di riferimento K, alla quaterna (x, y, z, t).
Cambiare sistema di riferimento significa trovare un'altra quaterna di misure che descrivano l'evento in K': (x', y', z', t').
Avremo perciò bisogno di una legge di trasformazione che consenta di calcolare le nuove coordinate in funzione delle vecchie.

<u>Trasformazioni di Galilei</u>

L'idea di “relatività” risale, tra gli altri, a Galilei, che nel famoso passo del Gran Naviglio, descrive come lo sperimentatore chiuso nella nave, che si muove di moto uniforme su acque calme, non avendo possibilità di vedere all'esterno punti di riferimento, non potrebbe capire, da esperimenti svolti all'interno della nave, se la nave sia in moto oppure no.
Nella cosiddetta Relatività Classica, si assume tacitamente (nessuno avrebbe mai pensato diversamente) che gli intervalli temporali e le lunghezze siano uguali in tutti i sistemi di riferimento, cioè che il tempo scorra allo stesso modo in tutti i riferimenti.
Il principio di Relatività Classica enuncia che le leggi della meccanica sono equivalenti in tutti i sistemi di riferimento inerziali (cioè in quiete o in moto rettilineo uniforme gli uni rispetto agli altri).
Per dedurre le equazioni della trasformazione, consideriamo un caso semplice, in cui un riferimento si muova rispetto all'altro nella direzione x con velocità V. Si supponga che il riferimento K' si stia spostando nella direzione positiva dell'asse x con velocità V rispetto a K.
E' facile osservare che:



$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

I due sistemi di equazioni costituiscono le trasformazioni galileiane delle coordinate nel passaggio dal sistema di riferimento K a K' e viceversa. Derivando rispetto a t si ottiene:

$$\begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v'_x + V \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$$

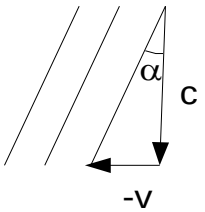
cioè il principio di additività delle velocità, e infine, derivando ancora rispetto a t:

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

da cui si può ricavare la covarianza della legge fondamentale della dinamica: F = ma, essendo massa e forza invarianti nella meccanica classica e l'accelerazione altrettanto invariante.
Inoltre se a = 0 in K, anche a' = 0 in K', ciò implica che un moto uniforme si trasforma in un moto uniforme. Le trasformazioni galileiane sono quindi atte a descrivere il passaggio di coordinate da un riferimento ad un altro nella meccanica classica, poiché la legge del moto è covariante rispetto ad esse. Infatti, se uno spazio è relativo, le leggi fisiche devono essere covarianti rispetto al passaggio da un riferimento inerziale ad un altro, devono essere descritte nei vari riferimenti dalla stessa funzione, cioè devono essere formalmente identiche.

L'esperimento di MICHELSON-MORLEY

A fine Ottocento, inizio Novecento, il problema dell'etere era al centro di studi teorici e sperimentali di fisici e matematici (Lorentz, Fitzgerald, Poincarè…), nonostante le proprietà attribuibili all'etere fossero alquanto assurde e in contraddizione tra loro (perfettamente rigido, ma anche elastico, perfettamente trasparente e con densità nulla).
Fisici sperimentali come Michelson erano impegnati in misure che evidenziassero il moto relativo della Terra e dell'etere.
Nel 1728 in Inghilterra l'astronomo di corte Bradley aveva verificato il moto di rivoluzione terrestre attorno al Sole e dato ragione del moto apparente di alcune stelle, spiegando il fenomeno noto come *aberrazione stellare*.
Dalle sue conclusioni si ricava anche che l'etere non si sposta con la Terra, cioè non è trascinato da essa nel moto di rivoluzione.
Bradley aveva verificato che nel seguire una stella che si trovi esattamente sulla verticale del punto della Terra da cui si osserva con il telescopio, questo deve essere puntato non verticalmente, ma lievemente inclinato di un angolo detto *angolo di aberrazione*.
Per capire il fenomeno, consideriamo un esempio molto semplice. Se una persona è in piedi ferma sotto una pioggia battente che cade verticalmente aprirà l'ombrello tenendo il manico verticale.
Se la stessa persona va in bicicletta, con una certa velocità, avrà l'impressione che la pioggia cada obliquamente verso di lui e terrà il manico dell'ombrello inclinato in avanti.
Se la bicicletta si sposta verso destra con velocità v, le gocce di pioggia si spostano verso la persona con velocità -v.



Se la pioggia ha velocità c, nello stesso tempo dt in cui la bicicletta si sposta di v dt, la pioggia fa un percorso pari a c dt. Si ricava subito che:

$$tg\alpha = \frac{v}{c}$$

Ora si pensi alla pioggia come alla luce che arriva a noi dalla stella lontana e alla bicicletta come la Terra che si sposta nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole.

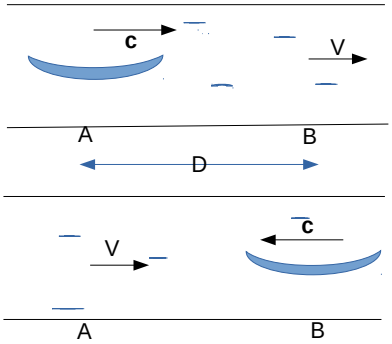
$$c = 3 \cdot 10^8 m/s \qquad v = 3 \cdot 10^4 m/s$$

Si trova che l'angolo α è circa 20". Ciò è in accordo con le misure ricavate dal moto ellittico apparente delle stelle, che è visto sotto quella semiapertura angolare.

Se è necessario inclinare il telescopio per catturare la luce trasportata dall'etere, ciò significa che l'etere non si sposta con la Terra, altrimenti la luce seguirebbe la Terra nel suo moto e cadrebbe verticalmente.
Pertanto, se la Terra si muove nell'etere immobile (perlomeno immobile rispetto al Sole), si dovrebbe percepire un "vento d'etere", che si sposta rispetto alla Terra con velocità opposta a quella di rivoluzione della Terra intorno al Sole.
Maxwell era convinto dell'impossibilità di misurare la velocità dell'etere rispetto alla Terra, avendo valutato che misure in tal senso dovevano dipendere dal fattore v^2/c^2, dell'ordine di 10^{-8}, assolutamente impensabile da misurare con precisione sufficiente.
Michelson raccolse la sfida e svolse una serie di esperimenti, che perfezionò nel 1887 con Morley, ideando un interferometro che poteva essere adatto allo scopo. Fu in seguito premiato con il Nobel per l'invenzione di tale apparecchiatura che si rivelò preziosa come strumento di precisione, nonostante il fallimento dell'esperimento riguardante l'etere.
Per meglio comprendere l'esperimento analizziamo come premessa due situazioni di composizione di velocità nel senso classico.

Premessa

1) Consideriamo una canoa che si sposti tra due punti A e B su un fiume in direzione della corrente.
L'andata avviene con la corrente a favore, il ritorno contro corrente. Si vuole calcolare il tempo totale del tragitto A-B-A.



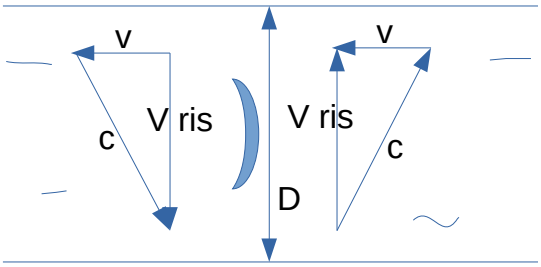
La velocità della canoa rispetto all'acqua è c, la velocità dell'acqua rispetto alla riva è v, di conseguenza la velocità della canoa rispetto alla riva è c + v all'andata, c - v al ritorno
(supponendo c > v).
Quindi i tempi impiegati sono:

$$\Delta t_{AB} = \frac{D}{c+v} \qquad \Delta t_{BA} = \frac{D}{c-v}$$

Con semplici passaggi si trova che il tempo totale per andata e ritorno è dato da:

$$\Delta t = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA} = \frac{2D}{c\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}$$

2) Supponiamo ora che la canoa debba attraversare il fiume, spostandosi su una traiettoria risultante ortogonale alla corrente.



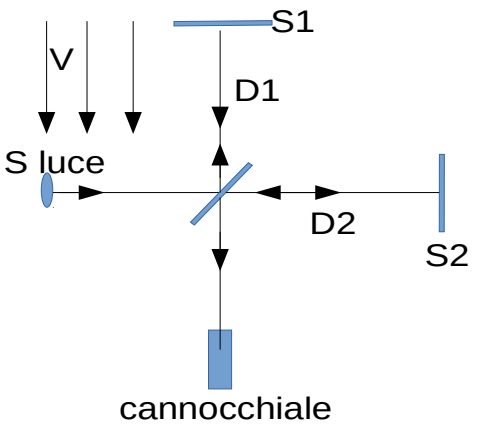
E' facile vedere che, sia all'andata sia al ritorno, la velocità della canoa rispetto alla riva è data da:

$$V_{ris} = \sqrt{c^2 - V^2}$$

e il tempo totale impiegato per andata e ritorno è:

$$\Delta t = \frac{2D}{c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Possiamo schematizzare approssimativamente così l'apparecchiatura usata da Michelson e Morley.



Una sorgente di luce invia un fascio luminoso su uno specchio semiriflettente inclinato di 45° rispetto alla direzione del raggio. La luce viene in parte trasmessa in parte riflessa dividendosi in due raggi che viaggiano in direzioni ortogonali. I due raggi così generati vanno a incidere su due specchi e vengono riflessi all'indietro tornando allo specchio semiriflettente. Ancora una volta parte della luce viene trasmessa e parte riflessa, di modo che i raggi emergenti tornano in parte verso la sorgente e in parte vengono indirizzati a un cannocchiale.
L'interferometro è sistemato in modo che uno dei due bracci sia parallelo all'ipotetico vento di etere, cioè alla velocità della Terra nel moto di rivoluzione attorno al Sole.

Il tutto è collocato in modo da galleggiare su mercurio per limitare le vibrazioni e per rendere agevole e fluida la rotazione dell'apparecchiatura. Le distanze D_1 e D_2 non possono di certo essere perfettamente identiche entro limiti di incertezza dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda della luce. Si utilizzò luce gialla di sodio con lunghezza d'onda di circa 500 nm.
Questa è una prima motivazione per cui sicuramente ci si aspetta di vedere nel cannocchiale una figura di interferenza. Inoltre il moto di andata e ritorno della luce nelle direzioni D_1 e D_2, tra gli specchi S_1 e S_2 e lo specchio centrale, necessita di tempi diversi, come calcolato precedentemente.
Pertanto, in presenza di un vento di etere si ha una seconda causa di interferenza.
L'idea di Michelson e Morley è quella di visualizzare le frange di interferenza una prima volta, ruotare il sistema di 90°, sostanzialmente scambiando D_1 con D_2, modificando quindi i cammini ottici dei due raggi, e misurare il previsto spostamento delle frange di interferenza.
Nella prima fase dell'esperimento, sfruttando le formule trovate precedentemente, si trova che la differenza temporale con cui i raggi arrivano al cannocchiale è:

$$\Delta t_1 = \frac{1}{c}\left(\frac{2D_1}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{2D_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \right)$$

Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di Δt_1 possiamo assumere $D_1 \sim D_2 \sim D$.
Inoltre, poichè il termine v^2/c^2 è piuttosto piccolo, si può approssimare:

$$\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1} \sim 1+\frac{V^2}{c^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sim 1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$$

Michelson, facendo riflettere in realtà più volte la luce su diversi specchi, aveva ottenuto cammini di circa 11 m. Si ottiene con alcuni passaggi:

$$\Delta t_1 \sim \frac{DV^2}{c^3} \sim 3,6 \cdot 10^{-16}\, s$$

misura non rilevabile in assoluto.
Ruotando l'interferometro di 90°, si ha:

$$\Delta t_2 = \frac{1}{c}\left(\frac{2D_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{2D_2}{1-\frac{V^2}{c^2}} \right)$$

Utilizzando le stesse approssimazioni fatte per Δt_1, si trova che la differenza Δt_2 è uguale e di segno opposto rispetto alla precedente Δt_1.

La differenza tra le due è quindi:

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 \sim \frac{2DV^2}{c^3} \sim 7 \cdot 10^{-16} s$$

La differenza tra i cammini ottici è dell'ordine di $\Delta l \sim c\Delta t \sim 2,2 \cdot 10^{-7} m$

La lunghezza d'onda della luce di sodio era circa $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7} m$

Di conseguenza le due lunghezze sono confrontabili, la differenza dei cammini è circa metà della lunghezza d'onda, ci si aspetta che, ruotando l'apparato di 90°, lo spostamento delle frange di interferenza faccia sì che ai massimi si sostituiscano all'incirca i minimi.
Michelson aveva previsto che lo shift fosse:

$$\frac{\Delta l}{\lambda} \sim 0,4$$

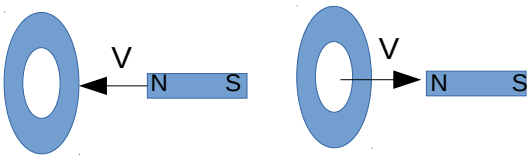
Il risultato sperimentale, nonostante molte prove svolte di giorno, di notte e sotto varie angolazioni, fu dell'ordine di 0,005, cioè, nei limiti degli errori sperimentali, praticamente nullo.
Quali potevano essere le spiegazioni di questo risultato?
1. l'etere si sposta con la Terra, ma abbiamo visto che tale ipotesi andava contro i risultati di Bradley;
2. nella direzione del vento d'etere la lunghezza subisce una contrazione di un fattore $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ ipotesi proposta da Lorentz e Fitzgerald, anticipatrice di risultati che saranno ritrovati da Einstein su basi ben diverse, ma di cui essi non avevano saputo dare una interpretazione fisica;
3. l'etere non esiste.
Quest'ultima ipotesi fu quella assunta da Einstein; nel suo articolo del 1905 il fisico tedesco abbandona definitivamente e in poche parole l'etere, la cui esistenza diventa superflua in un contesto di spazio relativo.

...Assumeremo questa congettura (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato "principio di relatività") come postulato, e oltre a questo introdurremo il postulato con questo solo apparentemente incompatibile, che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata V, indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti. Questi due postulati bastano a pervenire ad un'elettrodinamica dei corpi in movimento semplice ed esente da contraddizioni, costruita sulla base della teoria di Maxwell per i corpi in quiete.
L'introduzione di un "etere luminoso" si dimostra fin qui come superflua, in quanto secondo l'interpretazione sviluppata non si introduce uno "spazio assoluto in quiete" dotato di proprietà speciali, né si associa un vettore velocità ad un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici.

Non è noto con sicurezza se Einstein conoscesse prima del 1905 l'esperimento di Michelson, certo è che le considerazioni da cui Einstein parte per derivare i suoi assunti sono altre, come vedremo.

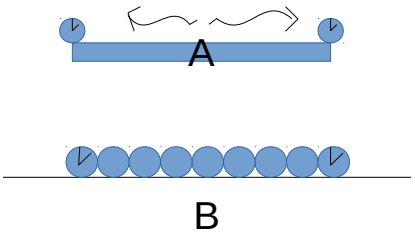
I postulati della Relatività Ristretta

Gli esperimenti svolti da Faraday sull'induzione elettromagnetica verificavano la generazione di una corrente elettrica indotta in una spira al variare del flusso del campo magnetico concatenato con la spira. Lo stesso identico effetto si ottiene muovendo il magnete verso la spira oppure muovendo la spira rispetto al magnete.



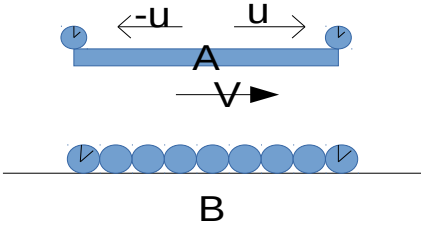
Il fenomeno fisico, però, nelle due situazioni trova spiegazioni diverse: nel primo caso l'accelerazione di elettroni inizialmente fermi nella spira può essere spiegata solo dalla presenza di un campo elettrico; la terza equazione di Maxwell prevede infatti la produzione di un campo elettrico indotto dalla variazione del flusso magnetico attraverso la spira.
Nella seconda situazione gli elettroni della spira sono in moto con velocità V in un campo magnetico statico, quindi su di essi agisce la forza **F** = e **V** x **B**, che genera la corrente elettrica.
Einstein parte dall'assunto che tutte le leggi fisiche debbano essere equivalenti nei sistemi di riferimento inerziali, quindi tale asimmetria non può essere accettata.
Questo problema irrisolto, unito alla evidenza teorica e sperimentale del fatto che la velocità della luce è costante, porta a due possibili conclusioni: o sono errate le leggi dell'elettromagnetismo o deve essere ripensata la relatività galileiana.
Mentre molti fisici si adoperavano a "correggere" le equazioni di Maxwell o a cercare formule ad hoc per salvaguardare la meccanica classica, Einstein intuì, con grande libertà di pensiero, che dovevano essere ripensati i concetti alla base della fisica e della visione del mondo, cioè le categorie di spazio e tempo.
Non è scontato che due eventi simultanei in un riferimento lo siano in un altro, non è scontato che il tempo scorra con la stessa velocità nei vari sistemi di riferimento.
La definizione di misura di tempo e di misura di lunghezza deve essere ripensata in termini differenti.
Fonda la sua teoria su due postulati apparentemente in contraddizione tra di loro:
Principio di relatività
- Le leggi fisiche sono equivalenti nei sistemi di riferimento inerziali.
Non solo le leggi della meccanica, ma anche le leggi dell'elettromagnetismo devono essere covarianti nel passaggio da un riferimento ad un altro che si muova di moto uniforme rispetto al primo.
Non c'è motivo di pensare che un fenomeno fisico trovi spiegazioni differenti al cambiare del riferimento.
Principio di costanza della velocità della luce
- La velocità della luce è una costante.
Essa è indipendente dal moto relativo della sorgente e dell'osservatore, è indipendente dalla direzione in cui si propaga. Essa è un valore limite non superabile da corpi dotati di massa.

<u>Relatività della simultaneità</u>
L'articolo di Einstein prosegue con una riflessione sulla simultaneità di due eventi, la cui assolutezza cade proprio in virtù della costanza di c.
Analizziamo tre diverse situazioni.
1) Supponiamo che l'osservatore A sia su un treno e l'osservatore B a terra. Il treno è fermo alla stazione. Nel riferimento del treno, A si trova esattamente nel punto centrale del treno e lancia due segnali luminosi verso la coda e verso la testa del treno dove sono collocati due orologi standard.

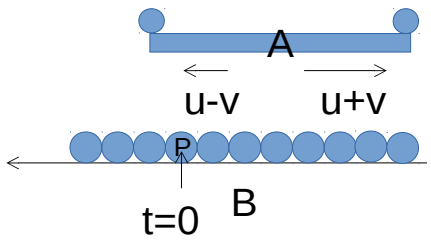


A nel suo sistema vede arrivare i segnali contemporaneamente in testa e in coda al treno; cioè gli orologi standard del sistema A segneranno lo stesso tempo t_A all'accadere dei due eventi. <u>Possiamo definire i due eventi simultanei nel sistema di riferimento A.</u>
Anche B, in questo caso, vede i due segnali arrivare simultaneamente alla coda e alla testa del treno; nel suo riferimento tutti gli orologi segnano lo stesso tempo $t_B = t_A$.

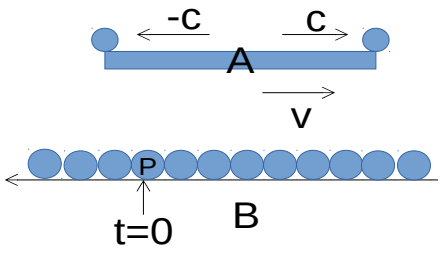
2) Supponiamo ora che il treno dove si trova A sia in moto con velocità V rispetto alla stazione. A è ancora nel punto medio del treno e spara due proiettili (con velocità u << c) contemporaneamente, uno verso la coda e uno verso la testa del treno.



Supponiamo che lo sparo avvenga all'istante t = 0 nel riferimento di A e che anche B legga t = 0 sui suoi orologi al momento dello sparo. Dal punto di vista di A i due proiettili si muovono con la stessa velocità in verso opposto. Dovendo compiere percorsi identici nel riferimento A, arriveranno allo stesso tempo t_A in coda e in testa al treno.



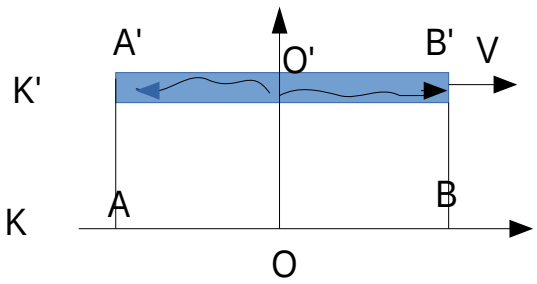
Dal punto di vista di B, secondo la legge classica di composizione delle velocità, i due proiettili si muovono con velocità rispettivamente uguali a: u + v e u – v.
Poichè il treno si sta spostando verso destra, la testa si sta allontanando dal punto P in cui B ha rilevato la partenza dei proiettili, mentre la coda si sta avvicinando al punto P.
Quindi lo spazio che deve percorrere il proiettile con velocità u + v è aumentato di un fattore vdt, mentre per l'altro proiettile lo spazio che deve essere percorso è diminuito di un fattore vdt.
In definitiva, a velocità minore corrisponde spazio minore e viceversa, e i due proiettili colpiscono la testa e la coda del treno simultaneamente anche per l'osservatore B, cioè, se gli orologi standard del sistema di B scattano una foto all'arrivo dei due proiettili in testa e in coda, le foto mostrano lo stesso tempo, nel sistema di B.



3) Supponiamo ora che A, sul treno in moto con velocità V rispetto alla stazione, lanci due segnali luminosi contemporaneamente dal punto centrale del treno. Nel sistema di riferimento del treno A vedrà arrivare i due segnali contemporaneamente alla coda e alla testa; nel suo riferimento le distanze sono uguali e le velocità sono uguali a *c*. La situazione per B è analoga alla precedente ma la velocità dei due segnali rimane sempre uguale a *c* anche nel suo sistema di riferimento, per via del postulato di invarianza della velocità della luce.
Quindi il segnale che va verso destra dovrà compiere un percorso più lungo (la testa del treno si sta allontanando dal punto in cui B ha visto partire i due segnali) e l'altro segnale dovrà compiere un percorso minore (la coda si sta avvicinando al punto in cui B ha visto partire i due segnali). L'orologio di B che scatta la foto dell'evento “arrivo del segnale in coda al treno” segnerà un tempo t_B minore del tempo t'_B in cui un altro orologio scatterà la foto dell'evento “arrivo in testa al treno”. Questo effetto è noto come “leading clocks lag”, cioè l'orologio in testa al treno è in ritardo rispetto all'orologio in coda dal punto di vista di B. Infatti se B potesse vedere gli orologi di A sul treno, vedrebbe che l'orologio in testa al treno segna un tempo $t_A < t'_B$, per B l'orologio è in ritardo.
Nel sistema di B, in moto relativo rispetto al riferimento di A, i due eventi non sono simultanei.

Fattore di desincronizzazione
Come noto, due eventi simultanei in un sistema di riferimento non lo sono generalmente in un altro sistema in modo relativo rispetto al primo. Si può calcolare lo sfasamento temporale degli orologi dei due sistemi.

Esempio. Considero un treno in moto con velocità v rispetto all'osservatore O di K.



O' sul treno misura la lunghezza Lo propria del treno. O' si trova esattamente al centro del treno e manda contemporaneamente due segnali di luce verso la coda e la testa del treno. Considero l'evento “lancio dei segnali” abbia coordinate (0,0) sia in K sia in K' (come garantiscono le trasformazioni di Lorentz). I due segnali per O' arrivano contemporaneamente in A' e B' all'istante
$t = L_0/2c = t'_A = t'_B$

Quindi in K' gli eventi “arrivo del segnale in A'” e “arrivo del segnale in B'” hanno coordinate:

A' (- $L_0/2$; $L_0/2c$) B'($L_0/2$; $L_0/2c$)

Calcoliamo t_A e t_B , cioè i tempi di arrivo dei segnali visti dall'osservatore O utilizzando le trasformazioni di Lorentz (vedi paragrafo successivo):

$$t = \gamma\left(t' + \frac{xv}{c^2}\right)$$

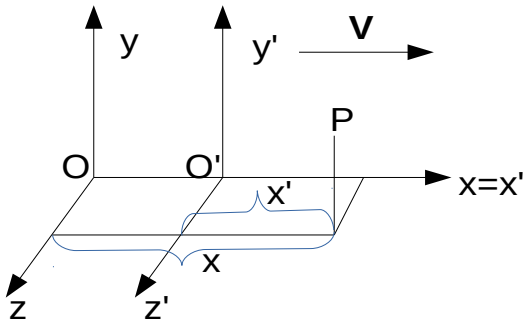
$$t_A = \gamma\left(\frac{L_0}{2c} - \frac{L_0 v}{2c^2}\right) \quad \text{e} \quad t_B = \gamma\left(\frac{L_0}{2c} + \frac{L_0 v}{2c^2}\right)$$

Quindi il “fattore di desincronizzazione” è:

$$\boxed{\Delta t = t_B - t_A = \gamma\left(\frac{L_0 v}{c^2}\right) = \gamma\frac{v}{c^2}\Delta x}$$

Le trasformazioni di Lorentz

Abbiamo ricavato le trasformazioni galileiane di passaggio da un riferimento inerziale ad un altro e analizzato come queste rendano invariante la legge della dinamica. Tali equazioni, però, non rendono invarianti le equazioni di Maxwell e non possono rispettare la costanza della velocità della luce.
Sorge quindi la necessità di scrivere un sistema di equazioni che rendano covarianti tutte le leggi della fisica (meccanica ed elettromagnetismo).



Riprendiamo la situazione semplificata in cui un sistema K' si muove rispetto ad un altro K nella sola direzione x. Le equazioni che andiamo a determinare dovranno essere ancora lineari nelle variabili x, y, z, t, poiché un moto uniforme deve trasformarsi in un moto uniforme.
Il tempo non è più invariante.
Il sistema sarà perciò del tipo:

$$\begin{cases} x = ax' + bt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = cx' + dt' \end{cases}$$

O' si muove con legge x (O') = Vt rispetto ad O, ed O si muove rispetto ad O' con legge x' (O) = $-Vt'$.

Pertanto: $0 = -a\,V\,t' + b\,t'$, essendo x (O) = 0 in K e x' (O) = $-Vt'$ in K'; si ricava $b = a\,V$.

La prima equazione è del tipo:
$x = a\,x' + a\,V\,t' = a\,(x' + V\,t')$
Possiamo chiamare la costante a in altro modo, essa è una costante fondamentale nella RR e viene indicata con γ.
$x = \gamma\,(x' + V\,t')$
γ deve essere positiva perché x è funzione crescente di x'.

Inoltre nella trasformazione inversa deve essere:
$x' = \gamma\,(x - V\,t)$
ed essendo la velocità della luce costante, la legge del moto di un fotone $x = ct$ deve trasformarsi in
$x' = ct'$.

Metto a sistema le condizioni:

$$\begin{cases} x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ x = ct \\ x' = ct' \end{cases}$$

da cui

$$ct = \gamma\left(ct' + Vt'\right) = \gamma\left(c + V\right)t'$$

$$ct' = \gamma\left(ct - Vt\right) = \gamma\left(c - V\right)t$$

Moltiplico termine a termine le due relazioni:

$$c^2 tt' = \gamma^2\left(c^2 - V^2\right)tt'$$

Eliminando t t' , con semplici calcoli, si trova:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

da cui:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad \text{e} \qquad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Possiamo ora ricavare t dalla seconda equazione trovata:

$$x - Vt = \frac{x'}{\gamma} \qquad \rightarrow \qquad Vt = \frac{\gamma x - x'}{\gamma}$$

Essendo $x = \gamma\,(x' + V\,t')$, sostituendo si ha: $t = \dfrac{\gamma^2\left(x' + Vt'\right) - x'}{\gamma V} = \dfrac{\gamma^2 Vt' + \left(\gamma^2 - 1\right)x'}{\gamma V}$

$$t = \gamma t' + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma}\frac{x'}{V} = \gamma t' + \frac{x'}{\gamma V} \cdot \frac{V^2}{c^2 - V^2}$$

Si verifica facilmente che :

$$\gamma^2 - 1 = \frac{V^2}{c^2 - V^2}$$

Quindi

$$t = \gamma\left(t' + \frac{x'}{\gamma^2} \cdot \frac{V}{c^2 - V^2}\right) = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$$

I sistemi delle equazioni di trasformazione note come trasformazioni di Lorentz sono pertanto:

$$\begin{cases} x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{Vx'}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

Poichè il *fattore di Lorentz* è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

è evidente che tali equazioni perdono di significato se $V > c$.
La RR prevede che un corpo partito da una velocità V < c non può essere accelerato a velocità superiori a quelle della luce. La RR non esclude la possibilità dell'esistenza di oggetti superluminali, che sarebbero comunque oltre il nostro orizzonte degli eventi, viaggiando da sempre a velocità superiori a c.
Consideriamo due eventi nel riferimento K tali che $t_B > t_A$, $\Delta t > 0$, cioè connessi causalmente in modo che A possa essere la causa dell'effetto B, ad esempio l'emissione di un segnale e l'arrivo del segnale. Supponiamo che il segnale si propaghi con velocità costante u, di modo che

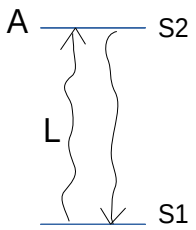
$$(*) \quad x_B - x_A = u\left(t_B - t_A\right)$$

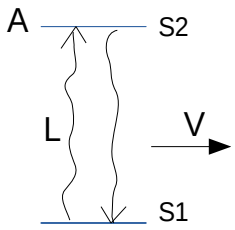
Si trova che nel riferimento K':

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma\left[\left(t_B - t_A\right) - \frac{V}{c^2}\left(x_B - x_A\right)\right] = \gamma\left(1 - \frac{Vu}{c^2}\right)\Delta t$$

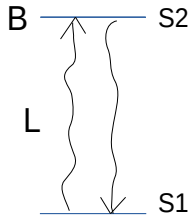
avendo tenuto conto della (*).
Pertanto Δt' sarà ancora positivo se u e V, velocità del segnale e velocità relativa dei riferimenti, sono minori di c; in questo caso la successione temporale degli eventi è conservata: B segue ancora A.
Se u fosse maggiore di c si potrebbe trovare un sistema di riferimento in cui la successione temporale si inverte, $t_B < t_A$, cioè l'effetto precederebbe la causa. Quindi, se si vuole preservare il *principio di causalità*, le velocità non possono superare la velocità della luce.
Ne riparleremo più avanti quando introdurremo il cono luce e l'invariante spazio-temporale.
Si può anche notare che se V è nulla o molto inferiore rispetto a c, le equazioni si riducono alle trasformazioni di Galilei, di cui sono quindi una generalizzazione.
La conseguenza notevole ed evidente delle equazioni di Lorentz è che lo spazio e il tempo non possono più essere considerati indipendenti. Si può parlare quindi soltanto di un unico ente SPAZIO-TEMPO, con quattro dimensioni, tre spaziali e una temporale.

La dilatazione dei tempi - L'orologio a luce
Sfruttando la costanza della velocità della luce è possibile teorizzare un orologio a luce. Posti due specchi parallelamente l'uno di fronte all'altro, un raggio di luce impiegherà sempre lo stesso tempo nella riflessione tra uno specchio e l'altro. Il periodo del moto è il tempo impiegato nel percorso di andata e ritorno. Il “tic” dell'orologio sarà ogni volta che la luce tocca S1.
Supponiamo che l'orologio a luce sia in quiete nel sistema di riferimento di A. Per un osservatore B fermo rispetto al riferimento di A, il periodo del moto sarà lo stesso.
Analizziamo cosa accade invece se A è in moto rispetto a B con velocità V.

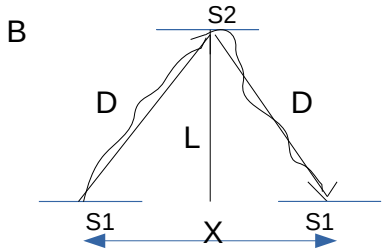




dal punto di vista di A



dal punto di vista di B



Nel riferimento di A il tempo impiegato dalla luce per tornare allo specchio S1 è $\Delta t_A = \dfrac{2L}{c}$

L'osservatore B vede il raggio di luce viaggiare lungo il percorso D + D raffigurato sopra poiché A si sposta mentre il raggio di luce si riflette tra gli specchi. E' intuibile che il tempo impiegato dalla luce sarà maggiore per B poiché D > L.

$x = V\Delta t_B$ è il percorso svolto dal riferimento A rispetto a B nel tempo Δt_B

Applicando il teorema di Pitagora:

$$D^2 = L^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

e sostituendo

$$\left(\frac{c\Delta t_B}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{c\Delta t_B}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{V\Delta t_B}{2}\right)^2$$

Con semplici calcoli si trova:

$$\left(\Delta t_B\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \left(\Delta t_A\right)^2$$

e infine

$$\boxed{\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_A} \qquad (1)$$

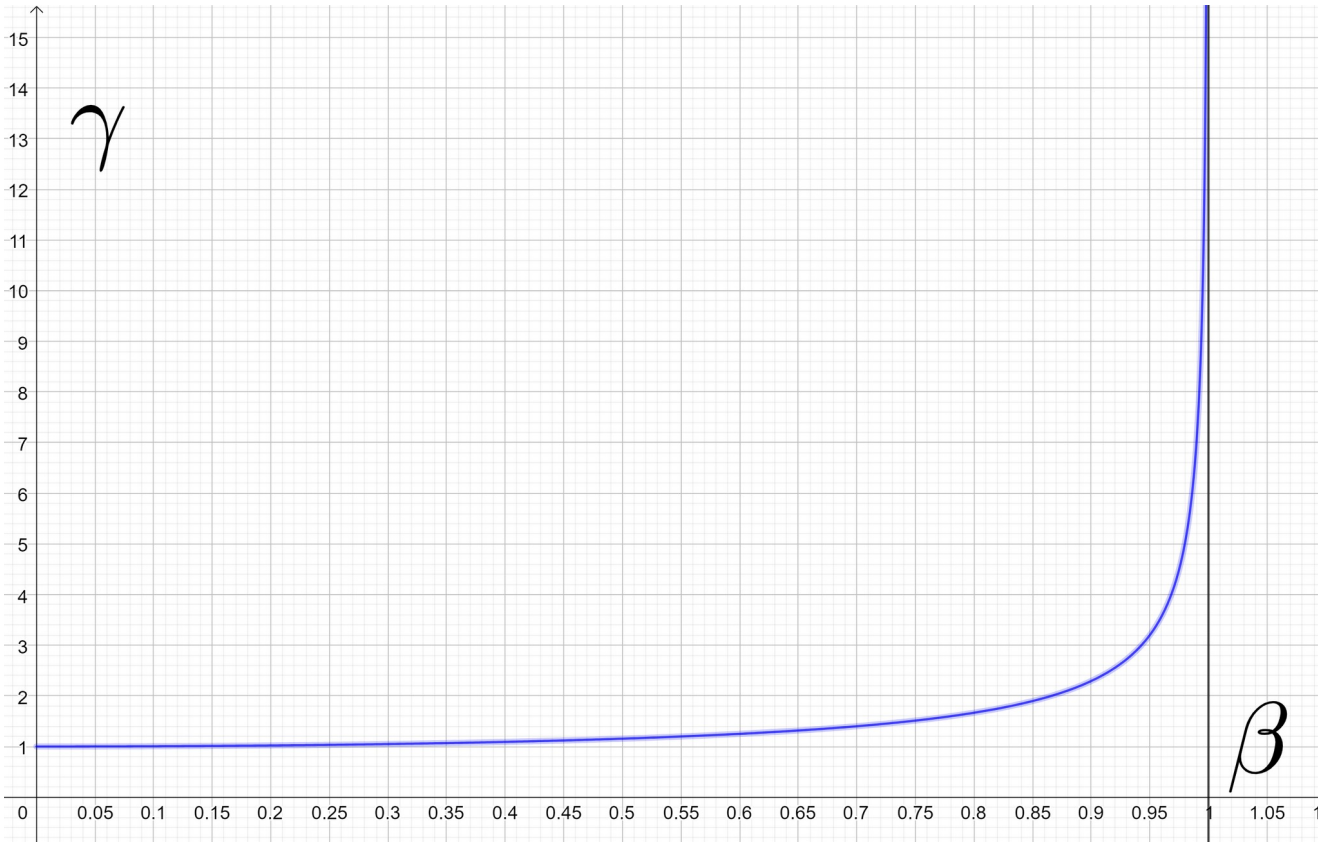
[La relazione (1) poteva anche essere dedotta dalle trasformazioni di Lorentz.]
Poichè γ è maggiore di 1, come previsto si ha che: $\Delta t_B > \Delta t_A$

L'intervallo di tempo che l'osservatore B misura è maggiore di quello rilevato da A. Questo fenomeno è noto come <u>*dilatazione dei tempi*</u>; esso non è percepibile in situazioni quotidiane per la trascurabilità del fattore di Lorentz quando si ha a che fare con velocità molto minori della velocità della luce.

Possiamo generalizzare la (1) scrivendola come $\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t_0}$

dove Δt_0, detto *"tempo proprio"*, è l'intervallo di tempo misurato nel sistema di riferimento di quiete del corpo, cioè il sistema in cui i due eventi accadono nello stesso luogo.
"L'intervallo di tempo tra due eventi della vita di un corpo in un sistema di riferimento che si muove con velocità V è maggiore di un fattore γ rispetto all'intervallo di tempo tra i due eventi misurato nel riferimento di quiete del corpo".
L'intervallo temporale, invariante nella fisica classica, diventa relativo al sistema di riferimento.
Per avere un'idea dell'incidenza del fattore di Lorentz proviamo a calcolarlo per alcuni valori del rapporto β = V/c e tracciamo un grafico.

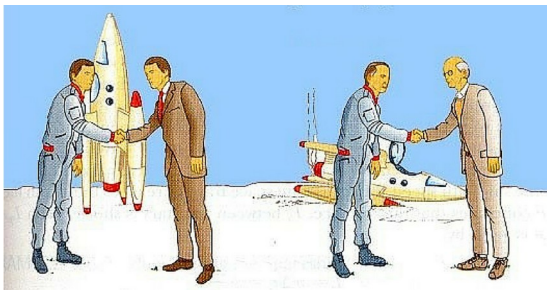
β=V/c	γ
0,000	1,000
0,100	1,005
0,200	1,021
0,300	1,048
0,400	1,091
0,500	1,155
0,600	1,250
0,700	1,400
0,800	1,667
0,900	2,294
0,910	2,412
0,920	2,552
0,930	2,721
0,940	2,931
0,950	3,203
0,960	3,571
0,970	4,113
0,980	5,025
0,990	7,089
0,991	7,470
0,992	7,922
0,993	8,466
0,994	9,142
0,995	10,013
0,996	11,192
0,997	12,920
0,998	15,819
0,999	22,366



Si può vedere come il fattore di Lorentz superi 1 di 1/10 a partire da velocità circa uguali alla metà di c e diventi rapidamente rilevante a partire da velocità circa pari a 0,8 c.
Il mezzo più veloce finora costruito dall'uomo ha raggiunto i 7·700 m/s cioè 0,0000257 c. In un aereo che viaggia a quella velocità un intervallo temporale di un'ora sulla Terra diminuirebbe di circa 1,18 x 10^{-6} s sull'aereo.
La dilatazione dei tempi è stata verificata sperimentalmente dall'osservazione dei muoni, particelle che si formano nell'alta atmosfera a circa 16 km dalla superficie terrestre e che viaggiano verso di noi con velocità prossima a quella della luce.
Si sono posti palloni sonda a circa 6 km di altezza e si è misurato il numero di muoni a quell'altezza.
Il tempo che tali particelle dovrebbero impiegare ad arrivare sulla Terra è t = (6 km) /c, circa 2 x 10^{-5} s. Questo tempo è una decina di volte maggiore della vita media di laboratorio delle particelle, cioè nel loro sistema di riposo. Quindi a livello della superficie terrestre si dovrebbe rilevare un piccolo numero di muoni non decaduti. In realtà ne arrivano molti di più.
Utilizzando la relazione (1) e considerando che γ è circa 20-25 alla velocità dei muoni, la contraddizione è superata. Il tempo di vita medio della particella diventa sufficiente perché molti muoni arrivino a terra, cosa che è stata verificata.
La dilatazione dei tempi è un fenomeno totalmente simmetrico. Se due sistemi si stanno muovendo reciprocamente con velocità V, ogni osservatore del primo sistema vede i tempi dilatati nell'altro sistema e viceversa. Vedremo che un ipotetico osservatore che viaggiasse con il muone non noterebbe nulla di anomalo nel suo sistema di riferimento; per lui il tempo del viaggio sarebbe quello della vita media della particella a riposo, ma in quel caso per lui la lunghezza del tragitto sarebbe molto più breve.

<u>Il paradosso dei gemelli</u>

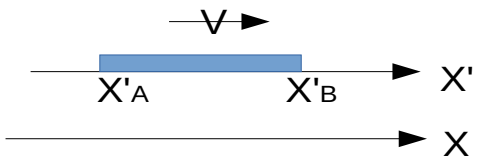
La simmetria della dilatazione dei tempi vale se i due orologi che misurano i tempi, rispettivamente nel sistema K e nel sistema K' in moto rispetto a K, si sovrappongono una sola volta, in altri termini: se i due orologi vengono sincronizzati ad un certo istante in cui sono vicini, essi non si devono più “incontrare”, cosa che accade sempre se l'orologio O' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto all'orologio O.



Poiché O' ritarda rispetto ad O, se si sovrapponessero una seconda volta, essi non sarebbero più sincronizzati.
Perché ciò accada, però, è necessario che parte del viaggio fatto da O' sia svolto con moto accelerato, quindi in un riferimento non inerziale rispetto a K.
Questo paradosso è noto come *paradosso degli orologi o dei gemelli*.
Se un gemello sta sulla Terra mentre l'altro parte per una stella lontana a velocità molto elevata e poi torna sulla Terra, si ritrova più giovane del gemello rimasto a Terra. Egli è realmente più giovane nel senso che il suo organismo è biologicamente più giovane, in quanto per tutte le cellule del suo corpo il tempo è trascorso più lentamente.
L'effetto non è reciproco (in questo sta il paradosso) poiché il sistema Terra è inerziale mentre quello dell'astronave non è lo è, il principio di relatività vale solo per una coppia di riferimenti inerziali.

La contrazione delle lunghezze

E' necessario chiarire cosa si intenda per lunghezza di un oggetto. Consideriamo una sbarra e per semplicità disponiamola nella direzione x. Possiamo definire "lunghezza della sbarra" la differenza positiva $x_B - x_A$, essendo le due ascisse misurate <u>contemporaneamente.</u>
E' quindi immediato intuire che la relatività della simultaneità inciderà sulla misura della lunghezza della sbarra nei sistemi di riferimento che non siano quello di riposo della sbarra.
La lunghezza di un corpo, grandezza assoluta nella fisica classica, diventa quindi relativa al sistema di riferimento.
Supponiamo che la sbarra si muova insieme all'asse x' con velocità V rispetto all'asse x.



E' sufficiente applicare le trasformazioni di Lorentz per trovare la relazione tra la lunghezza propria, cioè la lunghezza nel sistema di quiete del corpo, con la lunghezza in un riferimento in moto uniforme.

$$x'_A = \gamma\left(x_A - Vt\right) \qquad x'_B = \gamma\left(x_B - Vt\right)$$

Da cui, sottraendo membro a membro:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x$$

dove $\Delta x'$ rappresenta la differenza delle coordinate nel sistema di riferimento solidale con la sbarra e Δx la lunghezza della sbarra nel sistema di riferimento che vede la sbarra muoversi di velocità V.
In generale si ha che:

$$\boxed{\Delta l = \frac{\Delta l_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cdot \Delta l_0}$$

relazione che esprime la "contrazione delle lunghezze", dove Δl_0 indica la *lunghezza propria* della sbarra, cioè la lunghezza della sbarra nel suo sistema di riposo.

"La lunghezza di un corpo in un sistema di riferimento in moto rispetto al corpo è più corta di un fattore γ rispetto alla lunghezza del corpo nel sistema di riferimento di quiete del corpo, cioè il sistema in cui il corpo è fermo".

Il fenomeno della contrazione delle lunghezze è ancora simmetrico; ogni osservatore del sistema K in moto relativo rispetto al riferimento K' vede oggetti identici più corti nell'altro riferimento e viceversa.

Composizione relativistica delle velocità

Per ricavare la formulazione relativistica della composizione delle velocità è sufficiente rifarsi alle equazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{Vx'}{c^2}\right) \end{cases}$$

Considerando due eventi, si ottiene facilmente che :

$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + V\Delta t'\right) \qquad \text{e} \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V\Delta x'}{c^2}\right)$$

Sappiamo che

$$V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{e} \qquad V_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

V è la velocità costante relativa tra i riferimenti. Dividendo termine a termine le espressioni su riportate per Δx e Δt si ottiene:

$$V_x = \frac{\Delta x' + V\Delta t'}{\Delta t' + \dfrac{V}{c^2}\Delta x'}$$

e, dividendo per Δt',

$$\boxed{V_x = \frac{V_x' + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}V_x'}}$$

Si può notare che, se V<<c, il denominatore è circa 1 e l'equazione si riduce al principio classico di additività delle velocità.

Si può inoltre verificare che c si trasforma in se stessa, come richiede il secondo postulato.

$$V_x = \frac{c + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}c} = c\frac{c + V}{c + V} = c$$

Effetto Doppler relativistico

Ricordiamo che l'effetto Doppler classico misurava la variazione di frequenza di un'onda percepita da un osservatore nei due casi:
1) osservatore in moto rispetto a una sorgente ferma;
2) osservatore fermo rispetto ad una sorgente in moto.
Indicando con V la velocità relativa tra osservatore e sorgente e con c la velocità dell'onda, le relazioni trovate erano, ad esempio nel caso di allontanamento:

1)
$$f' = f\left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

2)
$$f' = f\frac{1}{1+\frac{V}{c}}$$

Nella RR le due situazioni non possono dare luogo a differenze, valendo il principio di relatività.
Si ha quindi un'unica relazione, che nel caso di allontanamento è:

$$f' = f\frac{1-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Ricordando che, se β = V/c << 1, si possono approssimare i termini tramite sviluppo in serie, si può verificare che:

1)
$$f' = f(1-\beta)$$

2)
$$f' = f\left(1-\beta+\beta^2\right)$$

Relatività
$$f' = f\left(1-\beta+\frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Si osservi che, fermandosi al termine di primo grado, le tre formule coincidono e si può utilizzare tale forma per velocità basse. Arrivando al secondo grado, la formula relativistica, che è quella corretta fisicamente, è la media aritmetica delle altre due.
Possiamo riscrivere la formula relativistica nei due casi come:

a) allontanamento
$$f' = f\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}$$

b) avvicinamento
$$f' = f\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}$$

Queste due formule riguardano l'*effetto Doppler longitudinale*, cioè il caso in cui la velocità V è parallela alla direzione di osservazione. Vi è anche un *effetto Doppler trasversale* (f' = f/γ) quando la velocità relativa è perpendicolare alla direzione di osservazione.
L'effetto Doppler per la luce ha molte applicazioni. In astronomia è stato utilizzato per determinare la velocità con cui oggetti celesti si allontanano o si avvicinano a noi, consentendo la misura delle componenti radiali delle velocità relative, cioè nella direzione di osservazione.
Le galassie mostrano una velocità di allontanamento tanto più grande quanto più sono distanti da noi (legge di Hubble) e ciò è una prova dell'espansione dell'universo.
Si è trovato però che il *redshift* cosmologico coincide con l'effetto Doppler relativistico solo per velocità molto minori di c.
Il fenomeno è detto *redshift* poiché, se la radiazione è nello spettro della luce visibile, la lunghezza d'onda mostra uno spostamento verso il rosso, cioè verso lunghezze d'onda maggiori, in quanto la frequenza diminuisce in virtù dell'allontanamento.

NOTA BENE: L'effetto Doppler riguarda la relazione tra la frequenza di un segnale (onda elettromagnetica) all'invio e la frequenza del segnale alla ricezione. In certi esercizi si chiede invece di valutare la frequenza di un evento (battito cardiaco, lampeggiare di un'insegna…) misurata in un riferimento K' in moto rispetto al riferimento K in quiete rispetto all'evento. In tale caso la frequenza nel riferimento K' si ricava dalla legge di dilatazione dei tempi, pertanto:
essendo T' = γ To , f' = fo/γ . Si intende che le misure di T' e To sono fatte mediante orologi.

SPAZIO-TEMPO DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

"*Lo spazio in sé e il tempo in sé sono destinati a svanire come pure ombre, poiché solo un genere di unione tra i due conserverà una realtà indipendente*". Questo scriveva Hermann Minkowski tre anni dopo la pubblicazione dell'articolo di Einstein. Minkowski, ex professore di matematica di Einstein, fu il primo ad abbozzare una formulazione geometrica della Relatività Ristretta, definendo le proprietà del nuovo spazio geometrico a quattro dimensioni in essa introdotto.
Si utilizza a tale scopo il calcolo tensoriale che dà particolare importanza a enti matematici, detti appunto *tensori*, l'uguaglianza tra i quali è invariante per gruppi di trasformazioni.
Senza scendere in dettagli, si consideri che nello spazio euclideo tridimensionale, nel passaggio da un sistema di coordinate ad un altro, cambia la terna (x, y, z) che identifica la posizione dei punti, ma si mantengono inalterate le distanze tra i punti. Nello spazio euclideo tali distanze vengono misurate mediante il teorema di Pitagora.

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Definendo così la distanza tra due punti, con le sue proprietà, si costruisce lo spazio metrico euclideo a tutti noto. Gli intervalli di tempo sono indipendenti dalle coordinate spaziali nella fisica classica e sono invarianti anch'essi. Si è visto che nella Relatività Ristretta le lunghezze (definite come differenza tra le coordinate di un punto A e di un punto B, misurate simultaneamente) non sono invarianti nel passaggio da un riferimento ad un altro; così pure gli intervalli di tempo.
Si è anche visto che ogni evento è caratterizzato da quattro coordinate, tre spaziali e una temporale, tra loro correlate e non scindibili.
E' quindi necessario definire uno spazio-tempo quadridimensionale in cui le "*distanze*" siano invarianti per le trasformazioni di Lorentz.
Si dimostra che il termine

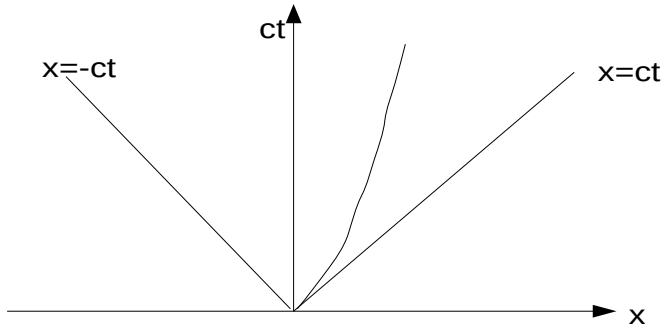
$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

detto "*invariante spazio-temporale*" è appunto invariante nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro tramite le trasformazioni di Lorentz.

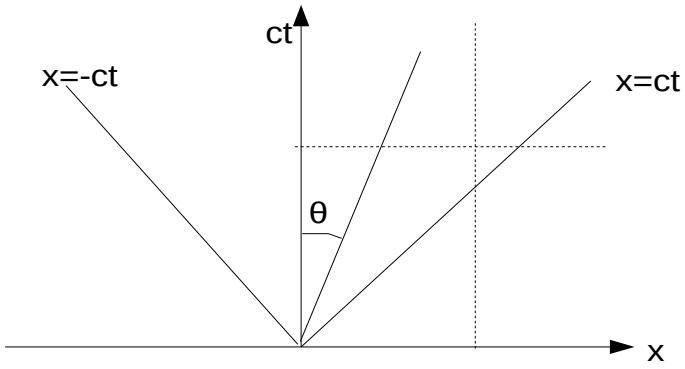
[La dimostrazione è semplice se ci si limita al caso di un solo asse spaziale: $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$
trasformando $dt = t_B - t_A$ e $dx = x_B - x_A$ con le equazioni di Lorentz, si verifica facilmente l'invarianza di ds]

La formula per il calcolo di Δs è simile a quella data dal teorema di Pitagora, compaiono solo i quadrati dei differenziali e non i prodotti misti come ΔxΔy, compare però anche la coordinata temporale, inoltre i segni usualmente assegnati non sono tutti positivi, ma sono (+, -, -, -) (potrebbero anche essere invertiti).
Lo spazio metrico così costruito è detto "pseudo-euclideo" ed è il cosiddetto "spazio di Minkowski".

Diagrammi di Minkowski
L'universo degli eventi associati a una quaterna di coordinate dovrebbe essere quindi rappresentato in un grafico a 4 dimensioni. Per semplicità si utilizza un diagramma bidimensionale detto "*diagramma di Minkowski" o "cronotopo"*, con un asse spaziale x e un asse temporale ct.



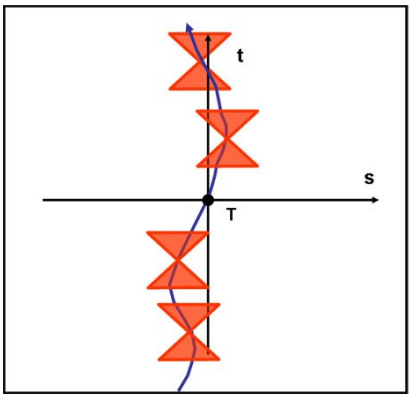
Poiché la velocità della luce c è molto alta è utile assumere come asse ct invece di t. (E' come avere posto c =1). In questo modo il moto di un fotone è rappresentato nel diagramma dalla bisettrice del primo quadrante se il fotone si muove nella direzione positiva delle x, dalla bisettrice del secondo quadrante se si muove nella direzione negativa delle x.
Poiché qualunque altro oggetto si deve muovere a velocità inferiori a c, le rette che rappresentano moti uniformi con velocità v, dovranno formare con l'asse dei tempi angoli minori di 45°. Allo stesso modo, una qualunque "*linea di universo o worldline*" di una particella dovrà avere in ogni punto tangente che forma angoli minori di 45° con l'asse ct. Rette che formino con l'asse dei tempi angoli maggiori di 45° rappresenterebbero oggetti che si muovono a velocità superiori a quelle della luce.



Per il fotone $$tg\theta = \frac{dx}{d(ct)} = 1$$

Per ogni altro oggetto $$tg\theta = \frac{dx}{d(ct)} = \frac{v}{c} < 1$$

La linea di universo di una particella che si muove a velocità costante 0,5 c, sarà una retta che forma con l'asse ct un angolo di circa 26° 34', più la retta si avvicina alla bisettrice più è alta la velocità della particella.
L'asse x rappresenta tutti gli eventi che accadono al tempo t = 0, l'asse ct rappresenta tutti gli eventi che avvengono nel punto x = 0.
Una retta parallela all'asse x rappresenta eventi simultanei nel sistema di riferimento (x,t); una retta parallela all'asse ct rappresenta eventi che avvengono nello stesso punto in quel sistema di riferimento.
I diagrammi di Minkowski possono essere utilizzati per classificare gli eventi dell'universo e verificare se uno può essere causa o conseguenza di un altro.



Dati due eventi (x_A,t_A), (x_B,t_B) essi sono separati dall'intervallo

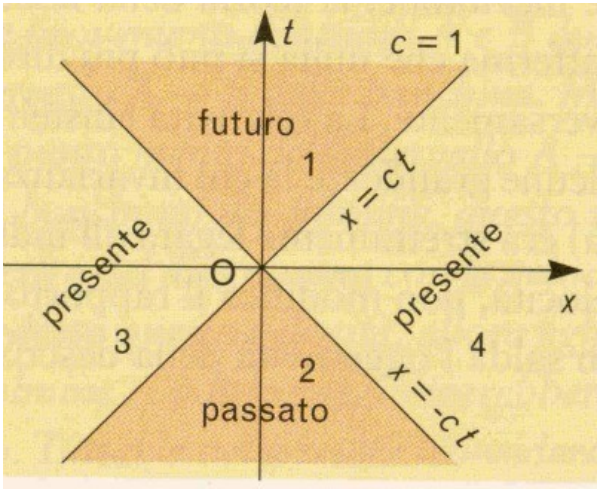
$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$

Dato che l'intervallo spazio-temporale è invariante, gli intervalli possono essere classificati a seconda del segno di Δs^2.
Se $\Delta s^2 > 0$, l'intervallo è detto di tipo tempo (*timelike*).
Se $\Delta s^2 = 0$, l'intervallo è detto di tipo luce (*lightlike).*
Se $\Delta s^2 < 0$, l'intervallo è detto di tipo spazio (*spacelike).*

<u>Osserviamo che due eventi *connessi causalmente* sono sempre separati da un intervallo di tipo tempo o di tipo luce</u>.
Infatti, se v è la velocità del segnale che connette i due eventi ed è minore o uguale a c, si ha:

$$\Delta x = v\Delta t \quad \text{e} \quad \Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = \left(c^2 - v^2\right)\Delta t^2 \geq 0$$

Ad ogni evento nel diagramma (x, ct) si possono associare due rette parallele alle bisettrici che dividono il piano in tre zone (solo apparentemente quattro).



Tutti gli eventi contenuti nel quadrante detto “futuro assoluto” di O sono successivi ad O per tutti gli osservatori e sono connessi ad O causalmente. Cioè possono essere collegati ad O da una linea di universo passante per O.

In tale quadrante vale la relazione $c^2t^2 - x^2 > 0$
con t>0.
Per un evento del futuro è sempre possibile trovare un sistema di riferimento in cui tale evento avviene nello stesso punto rispetto ad O, ma non è possibile trovare un sistema di riferimento in cui tale evento sia simultaneo ad O.

Nel quadrante detto “passato assoluto” di O stanno eventi che possono essere connessi ad O mediante una linea di universo e che appartengono al suo passato, cioè precedono O per tutti gli osservatori.

In tale quadrante vale la relazione $c^2t^2 - x^2 > 0$
con t<0.
Gli eventi del futuro e del passato di O sono collegati ad O da intervalli di tipo tempo, e ciò è vero per ogni osservatore essendo l'intervallo invariante.

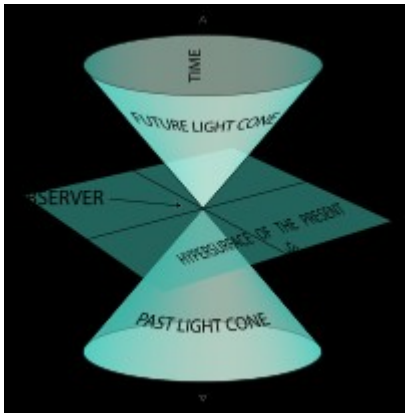
Gli eventi che stanno sulle bisettrici (che in quattro dimensioni diventano un “ipercono”, provate a pensarlo in tre dimensioni per semplicità) sono eventi che possono essere connessi ad O mediante segnali di luce. Infatti si parla di “coni-luce” o “cono di luce”.

Gli eventi del cono luce sono connessi ad O da intervalli di tipo luce. $c^2t^2 - x^2 = 0$

La zona del piano (dello spazio) fuori del cono di luce rappresenta il “presente assoluto” o “altrove assoluto” di O in quanto è possibile trovare un sistema di riferimento in cui questi eventi sono simultanei ad O ma non è possibile trovare nessun sistema di riferimento in cui questi eventi avvengano nello stesso punto di O.
Il presente assoluto è caratterizzato dalla relazione: $c^2t^2 - x^2 < 0$

Gli eventi dell'altrove formano con O intervalli di tipo spazio. Non possono essere connessi causalmente con O in quanto un segnale che colleghi O ad un evento di questa zona dello spaziotempo dovrebbe viaggiare più veloce della luce.
Nella fisica classica si avrebbe soltanto una distinzione tra il semipiano t > 0 (futuro) e il semipiano t < 0 (passato).
In relatività il fatto che la velocità della luce costituisca un limite per i corpi dotati di massa, genera questa diversa suddivisione dello spaziotempo.

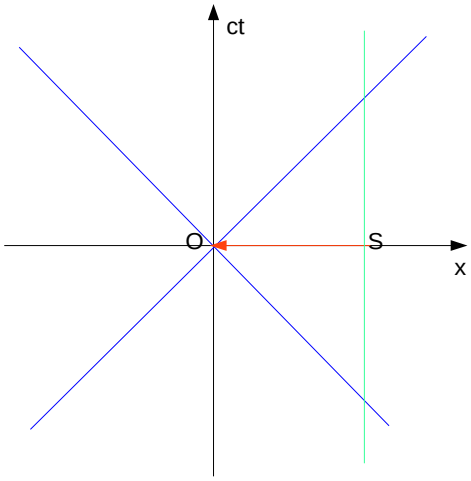
Ogni evento è associato a un suo cono luce.



Nella meccanica quantistica relativistica la probabilità che due eventi connessi causalmente siano associati da un intervallo di tipo spazio non è nulla. Questo implica tra l'altro che un secondo osservatore possa vedere la successione degli eventi invertita temporalmente (ad esempio l'emissione e l'assorbimento di una particella). Questo paradosso può essere superato ipotizzando l'esistenza di una particella di ugual massa ma carica opposta, la cosiddetta antiparticella.

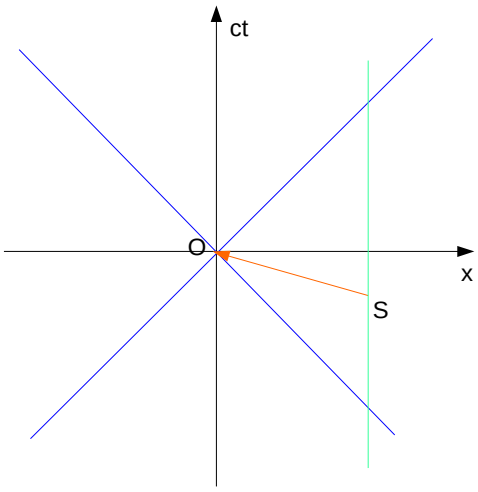
ESEMPIO per chiarire il concetto di connessione causale

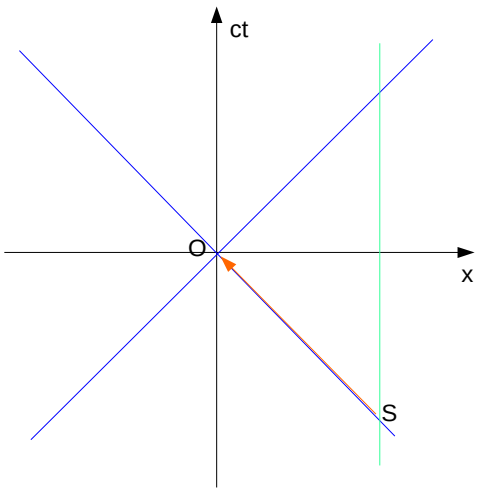
Consideriamo come evento lo scontro S di due asteroidi a una distanza D di 3×10^{11} m dalla Terra, in particolare dal punto O. Lo scontro ad altissima velocità provoca emissione di luce (v = c) e di frammenti che vengono sparati tutti con velocità diverse, sempre minori di c.



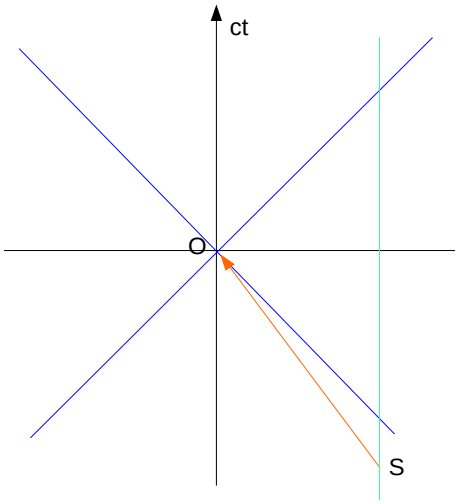
1) Se lo scontro avviene all'istante t = 0, nell'"adesso", O (qui ed ora) non può essere connesso ad S, poichè l'informazione dovrebbe viaggiare a velocità infinita
($\theta = 90$, tg $\theta = \infty$; oppure $v = D/0 = \infty$).
O(0,0) non può subire nessuna conseguenza dell'evento S per lo stesso motivo.

2) Il tempo che impiega la luce ad arrivare da S ad O è
$t = 3 \cdot 10^{11}/3 \cdot 10^{8} = 10^{3}$ s.
Se lo scontro è avvenuto a t = - 100 s nel riferimento di O, cioè 100 s fa per O, l'evento non può essere connesso al qui ed ora di O.
Il segnale dovrebbe viaggiare a velocità $v = D/100 = 3 \cdot 10^{9}$ m/s, superiore alla velocità della luce.
Si noti che l'angolo formato dal vettore SO con l'asse dei tempi è maggiore di 45°.



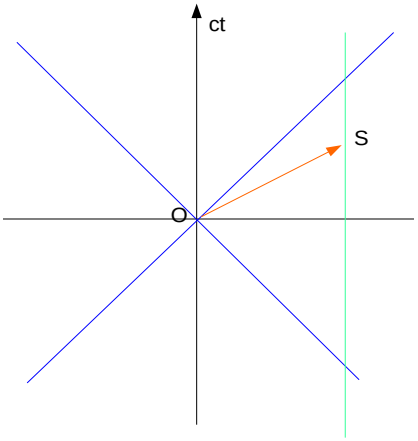


3) Se l'evento S è avvenuto a $t = -10^3$ s, S si trova sulla superficie del cono di luce di O. O può avere informazione di S poiché gli arriva la luce dell'esplosione, ma non può essere ancora raggiunto dai frammenti dell'esplosione.

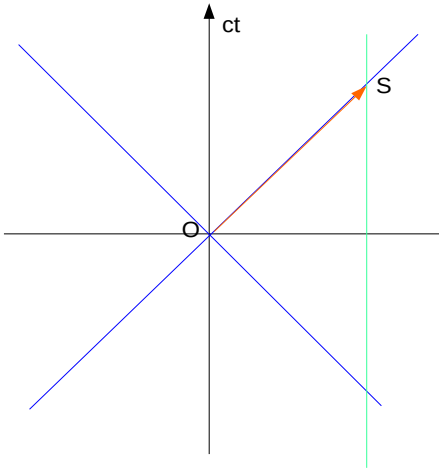


4) Se l'evento S è avvenuto più di 10^3 s nel passato di O, ad esempio a $t = -3 \cdot 10^3$ s, O riceve la luce dell'esplosione, ma può anche essere raggiunto da qualche frammento di roccia che viaggi a velocità
$v = D / 3 \cdot 10^3 = 10^8$ m/s.
Se S fosse avvenuto ancora più indietro nel tempo, O sarebbe raggiunto da frammenti di roccia progressivamente più lenti.

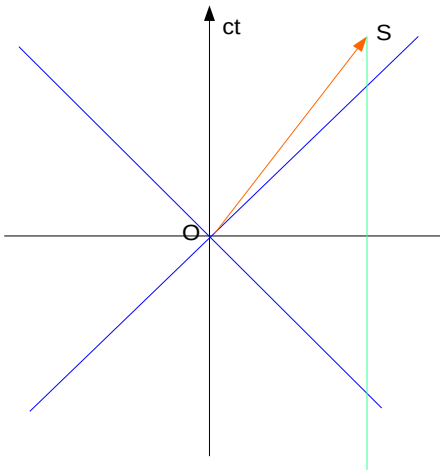
E se S avvenisse dopo l'istante t = 0?



5) Se S avvenisse a un istante t positivo ma inferiore a 10^3 s, ad esempio t = 100 s, O non potrebbe in alcun modo condizionare tale evento.
O non potrebbe essere causa dell'evento né prevenirlo: per esempio non potrebbe lanciare un missile per deviare la traiettoria di un asteroide provocando o impedendo lo scontro nel punto S. Infatti, per arrivare nella posizione dello scontro, il missile dovrebbe viaggiare a velocità superiore a c. Quindi O non può essere connesso in alcun modo con l'evento S.



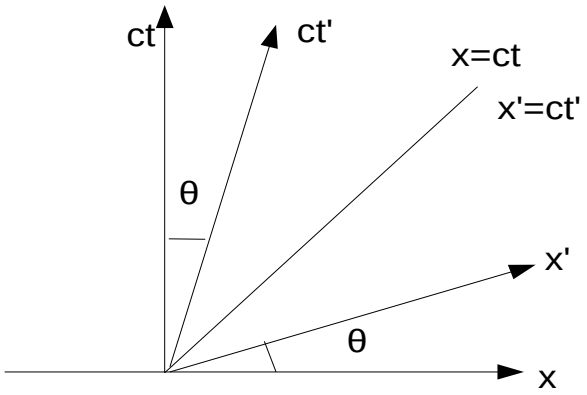
6) Se S avviene esattamente a $t = 10^3$ s, O può essere connesso all'evento mediante un segnale di luce.
S è sul cono di luce.
O potrebbe essere causa dell'evento inviando all'istante t = 0 un'onda elettromagnetica che in qualche modo condizioni la traiettoria degli asteroidi.



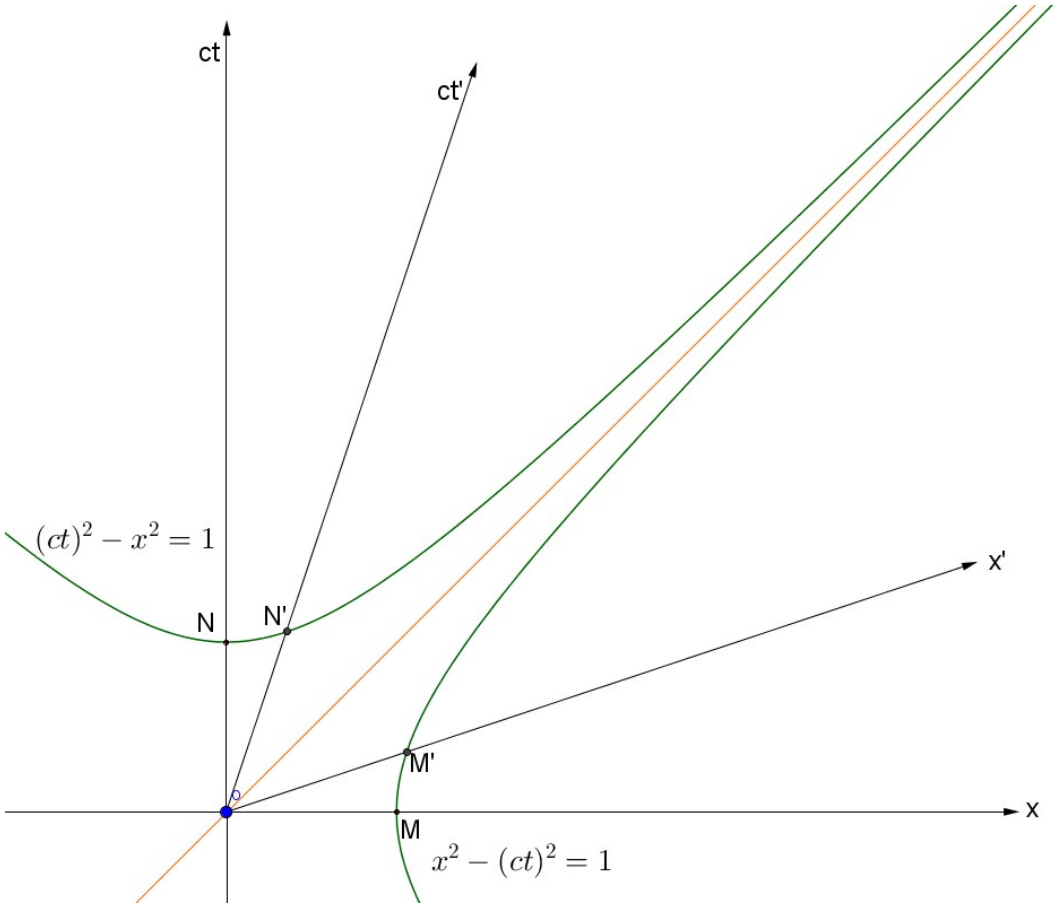
7) Se lo scontro avviene a un tempo $t > 10^3$ s, O può condizionare l'evento inviando verso il punto dove ha luogo S un missile dotato di velocità inferiore a quella della luce. Più l'istante dello scontro si sposta avanti nel futuro, minore è la velocità da imprimere al missile per raggiungere in tempo il luogo dello scontro.

Diagrammi di Minkowski e cambio di sistema di riferimento

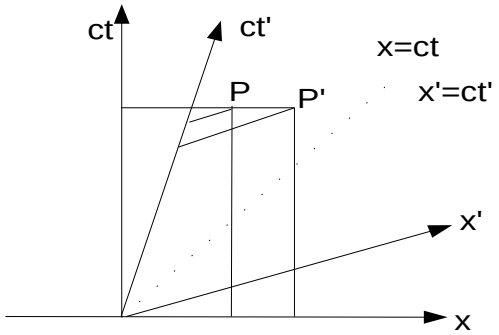
Se consideriamo il diagramma (x,ct) come riferimento K e introduciamo un secondo riferimento K' (x',ct') in moto con velocità v rispetto al primo riferimento, come possiamo rappresentarli nello stesso grafico?



Poichè l'asse ct' rappresenta gli eventi che avvengono tutti nel punto O' nel sistema K', esso è la linea di universo di O' nel sistema K. Infatti l'origine del sistema K' è ferma nel sistema K' ma si muove di velocità V rispetto al riferimento K.
La linea di universo di un fotone deve essere x' = ct' anche nel riferimento K', pertanto la retta x' = ct' deve ancora essere bisettrice dei nuovi assi. Quindi l'asse x' deve formare con l'asse x lo stesso angolo che ct' forma con ct.
La scelta di porre gli assi di K ortogonali è una scelta di comodità, ma non è obbligatoria. I nuovi assi comunque sono da considerarsi completamente equivalenti ai vecchi, quindi l'angolo tra di loro è da intendersi retto.
Qualunque coppia di rette così costruita rappresenta un sistema di riferimento inerziale.
Per trasformare l'unità di misura si utilizzano le iperboli in figura: poiché l'equazione di tali iperboli è ottenuta a partire dall'invariante spazio-temporale si è certi che l'intercetta vale 1 in tutti i riferimenti.

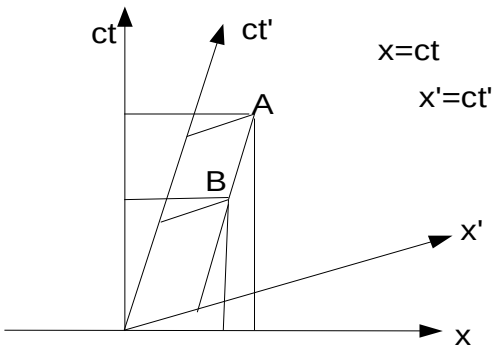


Tramite i diagrammi di Minkowski è facile verificare quanto già dimostrato in precedenza: la relatività della simultaneità, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze.



(1)

(1) Gli eventi P e P' sono simultanei in K ma non lo sono più in K'.

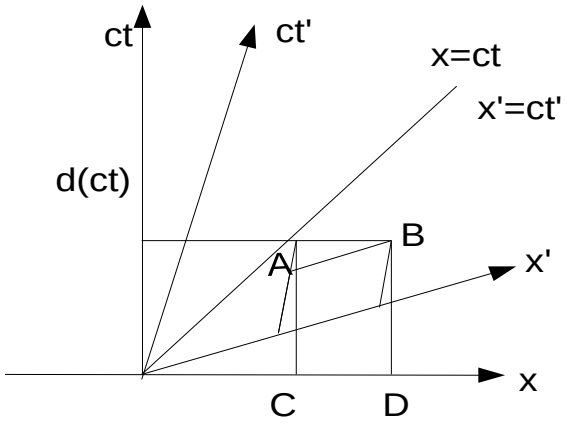


(2)

(2) Gli eventi A e B avvengono nello stesso punto nel sistema K', per cui $\Delta t'$ è il tempo proprio che separa i due eventi in K': si può verificare (fissando opportunamente le unità di misura sugli assi) che l'intervallo di tempo tra A e B misurato in K è maggiore di quello misurato in K'.

Analogamente si può verificare la contrazione delle lunghezze.

(3)



(3) A e B sono eventi contemporanei in K', quindi x'A – x'B è la lunghezza propria di AB. Per misurare la lunghezza in K si devono trovare due eventi corrispondenti di A e B che siano simultanei in K, ad esempio C e D. Si verifica che CD < AB.

DINAMICA RELATIVISTICA

Delle tre leggi della dinamica newtoniana l'unica che si mantiene inalterata nella RR è la prima, cioè il principio di inerzia. La seconda legge della dinamica, o equazione del moto, non può essere dedotta per via teorica dai postulati della RR, ma deve essere compatibile con le trasformazioni di Lorentz. La sua forma corretta venne elaborata nel 1906 da Minkowski e Planck.
Si verifica sperimentalmente che la seconda legge della dinamica scritta nella forma $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$ non è più valida per alte velocità.
D'altra parte la legge classica prevede che, applicando una forza costante ad un corpo per un tempo sufficientemente lungo, questo possa raggiungere una velocità alta quanto si vuole (L = ΔK), risultato che non può sussistere in relatività. Ad oggi il fatto che c sia una velocità limite non è ancora stato contraddetto da esperimenti.
Negli anni '60 William Bertozzi realizzò un esperimento accelerando elettroni attraverso una differenza di potenziale elettrico. Il lavoro svolto dalla forza elettrica è L = eΔV = ΔK, pertanto noto. Si rilevava, però, che l'energia cinetica degli elettroni non cresceva in modo lineare, bensì sempre più lentamente man mano che la velocità si avvicinava al valore limite c. Quindi, più la velocità aumentava, maggiore era l'energia necessaria per aumentarla di una stessa quantità.
La legge della dinamica viene sostituita in RR dalla **legge di Minkowski**:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d\left(\frac{E}{c^2}v\right)}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 v)}{dt}$$

dove γ è il fattore di Lorentz che tende a 1 per velocità basse. Anche in questo caso la legge si riduce a quella classica per v<<c.
D'ora in avanti indicheremo con m_0 la proprietà intrinseca e invariante di un corpo che chiameremo "massa a riposo".
Poichè γ dipende dalla velocità si può notare che la derivata del momento è la derivata di un prodotto:

$$F = m_0 \frac{d(\gamma v)}{dt} = m_0\left(\gamma \frac{dv}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}v\right)$$

Si vede che la forza presenta una componente parallela all'accelerazione e una parallela alla velocità (cosa che non si riscontrava nella fisica classica).
Nel caso particolare in cui forza, accelerazione e velocità sono parallele, si dimostra che la legge della dinamica si semplifica in:

$$F = \gamma^3 m_0 a = \frac{m_0 a}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

da cui si ha:

$$a = \frac{F}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Si osservi che al tendere di v a c l'accelerazione tende a 0. Si ritrova quindi che un corpo non può essere accelerato fino a velocità c.
La legge di Minkowski è consistente con le trasformazioni di Lorentz, verifica cioè il principio di relatività.
L'equazione di moto **F** = q (**E** + **v** x **B**) è consistente con le trasformazioni di Lorentz, mentre l'equazione di moto ottenuta uguagliando F con la legge di gravitazione di Newton non può essere inclusa nella teoria della relatività ristretta.
Nella legge classica F = ma, la massa m rappresenta l'inerzia del corpo, cioè la tendenza ad opporsi alla variazione della velocità. In relatività **la massa inerziale viene sostituita dall'energia** ed è questa la differenza sostanziale che caratterizza tutta la dinamica relativistica:

$$\frac{E}{c^2} = \gamma m$$

QUANTITA' DI MOTO

Dalla legge di Minkowski è immediato dedurre che la quantità di moto di una massa in moto con velocità v è data da:

$$p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

<u>Se in un dato riferimento vale il principio di conservazione della quantità di moto per un sistema di corpi, tale principio vale per tutti gli osservatori solo se si assume la (1) come espressione della quantità di moto</u>. Utilizzando l'espressione classica la conservazione non è mantenuta cambiando il sistema di riferimento.
Si può riscrivere la (1) come

$$p = \gamma m_0 v = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} v$$

dove m è la "massa relativistica" e dipende dalla velocità. Il concetto di "massa relativistica" ha solamente più importanza storica ed è stato pressoché abbandonato.

ENERGIA CINETICA RELATIVISTICA e EQUIVALENZA MASSA-ENERGIA

Per il teorema dell'energia cinetica il lavoro svolto da o su un corpo è pari alla variazione della sua energia cinetica. Possiamo quindi calcolare l'energia cinetica come lavoro per portare una massa da velocità 0 a velocità v.
Consideriamo ancora il caso semplificato in cui F, v, a sono parallele.

$$K = \int_0^v F \cdot dx = \int_0^v \gamma^3 m_o a dx = m_o \int_0^v \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} v dt =$$

$$= -m_o \frac{c^2}{2} \int_0^v \frac{-\frac{2}{c^2} v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv = -m_o \frac{c^2}{2} \left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^v = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

Il risultato ha validità generale:

$$\boxed{K = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \gamma - m_0 c^2}$$

Si può notare che se v tende a 0, anche K tende a 0. Inoltre se v<< c, sviluppando in serie, si ha:

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \sim m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \sim \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Poichè l'energia cinetica è data dalla differenza di due termini di cui uno indipendente dalla velocità v del corpo, si può arguire che l'energia totale della massa è:

$E = m_0 c^2 \gamma = m_0 c^2 + K$ o ponendo m = γm_0 $\boxed{E = mc^2}$

cioè l'energia totale di un corpo è la somma dell'energia cinetica e di un termine detto "energia di riposo o energia di massa" che sussiste anche se il corpo è fermo nel sistema di riferimento.
Quindi:

$$E = E_0 + K$$

$E_0 = m_0 c^2$ è l'energia di riposo.

Questo risultato importantissimo stabilisce l'equivalenza di massa ed energia: un corpo possiede energia per il solo fatto di possedere una massa.
La massa può essere convertita in energia e viceversa.
Ciò non è riscontrabile a livello macroscopico ma lo è a livello subatomico e nucleare.

Il principio di conservazione dovrà quindi riguardare la somma di energia cinetica ed energia di massa, che separatamente non si conservano in generale. Esso sarà espresso nella forma:

$$\sum_i K_i + \sum_i m_i c^2 = \sum_f K_f + \sum_f m_f c^2$$

$$\Delta K = -\Delta m c^2$$

Ad esempio, parte dell'energia cinetica di un sistema di particelle può tradursi nella creazione di coppie di altre particelle, una coppia di protoni può cedere parte della sua energia cinetica che si converte in una coppia protone-antiprotone o, viceversa, una coppia elettrone-positrone può trasformarsi in due fotoni, cioè in energia cinetica, essendo la massa dei fotoni nulla.
Inoltre la massa totale di una particella subatomica non coincide in generale con la somma delle masse dei suoi componenti. Applicando la conservazione massa-energia:

$$Mc^2 = \sum mc^2 + \sum K + \sum E_{\text{int}}$$

La massa della particella è la somma delle masse dei componenti con le energie cinetiche e con le energie di interazione tra i vari componenti. Nelle reazioni nucleari normalmente la massa iniziale dei componenti non coincide con la massa finale, poiché parte di questa è stata trasformata in energia oppure parte dell'energia è stata spesa per rompere i legami nucleari.
La massa di un nucleo di elio è minore della somma delle masse dei due protoni e dei due neutroni che lo costitusicono per un fattore di circa l'1%.
La massa di un protone è maggiore di circa il 99% della somma delle masse dei tre quark che lo costituiscono.

RELAZIONE TRA ENERGIA ED IMPULSO

Si è visto che: $E = \gamma m_0 c^2$

e $p = \gamma m_0 v$

Elevando le due relazioni al quadrato:

$$E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \quad \rightarrow \quad \frac{E^2}{c^2} = \gamma^2 m_0^2 c^2$$

$$p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2$$

e sottraendo:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \gamma^2 m_0^2 \left(c^2 - v^2\right) = \gamma^2 m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^2$$

o analogamente:

$$(*) \quad \boxed{E^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4}$$

pertanto il termine (*) è un invariante per le trasformazioni di Lorentz.

L'energia può quindi essere espressa con : (**) $\boxed{E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$

Nella meccanica classica la relazione tra energia e impulso è data da:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Tale espressione perde significato facendo tendere m a 0, l'energia tenderebbe a infinito.

Dalla (**) si trova invece che:

1) se v = 0, p = 0, quindi, come già noto, $E_0 = m_0 c^2$

si trova cioè l'energia di riposo

2) se $m_0 = 0$, si trova $E = cp$ oppure $p = \frac{E}{c}$

che rappresentano le espressioni relativistiche di <u>energia ed impulso di particelle di massa nulla</u>, come i fotoni.
Per tali particelle le formule:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{e} \qquad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

sono prive di significato. Si può osservare però che E e p possono assumere valori non nulli solo se sia numeratore sia denominatore tendono a 0, cioè se la massa tende a 0 e v tende a c.
Le particelle di massa nulla viaggiano necessariamente con velocità c.
In altri termini, ad esempio per l'energia:

$$E\sqrt{1 - \beta^2} = m_0 c^2 = 0 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow v = c$$

Anche la terza legge della dinamica non vale più in RR. La legge newtoniana asseriva che la forza di interazione tra due corpi distinti agisce con uguale intensità e direzione, ma con verso opposto, su ognuno dei due corpi: $F_{12} = - F_{21}$ <u>istante per istante</u>.
Poichè nella relatività la simultaneità non si mantiene nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro, è evidente che anche la legge di azione e reazione potrebbe valere in un riferimento e non in altri. L'utilizzo delle forze per descrivere sistemi di particelle diventa perciò inadatto e viene sotituito definitivamente dalla trattazione mediante il concetto di campo. Il campo trasporta energia e quantità di moto, è un ente reale mediatore dell'interazione tra le particelle. La fisica moderna fa utilizzo esclusivo del conetto di campo, le forze appaiono come scomodi artifici.

Indicazioni sulle unità di misura:

Abitualmente l'energia delle particelle viene espressa in multipli dell'elettronvolt, che è l'energia che possiede un elettrone accelerato dalla differenza di potenziale di 1 Volt. La massa di conseguenza è espressa in multipli dell'elettronvolt /c^2:

$$1eV \sim 1,6 \cdot 10^{-19} J$$

Una unità di massa atomica, u.m.a o semplicemente u, corrisponde alla massa della dodicesima parte dell'atomo del carbonio 12:

$$1u.m.a = 1,661 \cdot 10^{-27} kg$$

$$1u.m.a = \frac{1,661 \cdot 10^{-27} kg \cdot c^2}{c^2} = \frac{931,5 MeV}{c^2}$$

Si calcola che l'energia di riposo delle particelle principali costituenti l'atomo è:

elettrone $E_0 = 0,511 MeV$

protone $E_0 = 938,3 MeV$

neutrone $E_0 = 939,6 MeV$

Cuneo, febbraio 2016

Bibliografia

V.Barone, *Relatività*, Bollati Boringhieri, Torino, 2004
H.Bondi, *La Relatività e il senso comune*, Zanichelli, Bologna, 1964
A.Einstein, *Esposizione divulgativa della Relatività*, Boringhieri, Torino, 1967
D.Halliday-R.Resnick, *Fondamenti di Fisica*, Zanichelli, 1990
L.R.Lagerstrom, Stanford University, *Understanding Einstein, The special Theory of Relativity*, Coursera, 2015
G.Longhi, *Appunti di Relatività*, Liceo Scientifico G.Peano, Cuneo
W.Pauli, *Teoria della Relatività*, Boringhieri, Torino, 1958

Integrazioni (dinamica) aprile 2021: https://www.youtube.com/watch?v=BN_ijbei0FM