LAVORO

Il lavoro è una grandezza scalare data dal prodotto scalare tra i vettori forza e spostamento.

$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$

si misura in Joule, dove 1 J = 1 N x 1 m.
Si deduce dalle proprietà del prodotto scalare che:

- L = 0 se $\vec{F} \perp \vec{s}$;
- L > 0 se l'angolo tra $\vec{F}$ *ed* $\vec{s}$ è <90°; (lavoro motore)
- L < 0 se l'angolo tra $\vec{F}$ *ed* $\vec{s}$ è >90°; (lavoro resistente)

SI DICE **POTENZA** IL LAVORO SVOLTO NELL'UNITÀ DI TEMPO

$P = \frac{L}{t}$ da cui sostituendo se $P = \frac{F \cdot s}{t}$ allora $P = F \cdot v$ (forza per velocità media)

L'unità di misura internazionale è $\frac{J}{s} = W$ (Watt).

ENERGIA MECCANICA

L'energia meccanica si divide in:

- energia cinetica
- energia potenziale gravitazionale
- energia potenziale elastica

ENERGIA CINETICA

L' energia cinetica è l'energia posseduta da un corpo di massa m in moto con velocità v. Equivale al lavoro necessario per portare un corpo di massa m da velocità 0 a velocità v (o viceversa).

$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2$

Per verificare la formula scegliamo un caso particolare: moto accelerato uniforme con partenza da fermo in cui $\overline{F} \| \overline{s}$. Se a è costante anche F è costante perché $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$;

$L = F \cdot s$; F = ma ; $\mathrm{s} = \frac{\mathrm{v}^2}{2\mathrm{a}}$ e sostituendo: $L = m \cdot a \cdot s \Rightarrow L = m \cdot \cancel{a} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot \cancel{a}} \Rightarrow \mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2$.

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{mv}_0^2 = \mathrm{E_f} - \mathrm{E_i}$

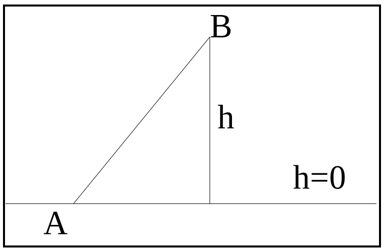
Il lavoro fatto dalla forza per modificare la velocità di un corpo è dato dalla differenza tra l'energia cinetica finale e quella iniziale.
Dimostrazione.
Caso particolare: $\overline{F} \| \overline{s}$, a è costante, F è costante

$L = F \cdot s$; $L = m \cdot a \cdot s \Rightarrow L = m \cdot \cancel{a} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2\cancel{a}} \Rightarrow L = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{mv}_0^2$.

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

E' l'energia che possiede un corpo di massa m che si trovi ad altezza h rispetto ad un livello di riferimento. Essa è pari al lavoro necessario per sollevare il corpo a quell'altezza.

Se $L = \overline{F} \cdot \overline{s}$, allora L = P h, cioè abbiamo $L = m \cdot g \cdot h$, per cui $E_g = m \cdot g \cdot h$.



Il lavoro dipende quindi da h e non dal tipo di percorso. E_g quindi dipende dal livello di riferimento, cioè è definita a meno di una costante dipendente dalla scelta del livello "0": $E_g = m \cdot g \cdot h + c$.

L'energia in un punto non è ben definita ma sono sempre ben definite le differenze dell'energia gravitazionale tra i due punti.

$L = mgh_B - mgh_A$

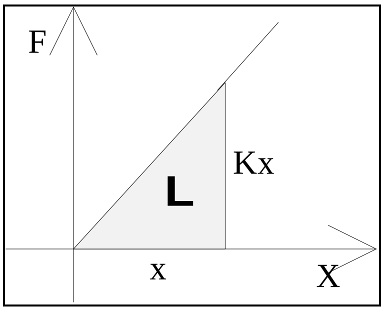
Da questo deduco che se svolgo un percorso in cui il punto iniziale è allo stesso livello del punto finale il lavoro è nullo.

In particolare per un percorso chiuso (torno al punto di partenza) il lavoro è sempre nullo: dire questo oppure dire che il lavoro dipende dal punto iniziale e finale ma non dal tipo di percorso sono affermazioni equivalenti per esprimere che il campo gravitazionale è un campo di forze conservative.

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

E' l'energia che possiede un oggetto elastico in stato di deformazione.

Posso calcolare l'energia potenziale elastica come il lavoro necessario per allungare o accorciare una molla di un tratto x.



$F = kx$

$L = Fx$ ma F non è costante e nemmeno x.

$L = \frac{1}{2}kx^2$

Considero un valore medio della forza pari a ½ Kx.

Quindi: $E_{el} = \frac{1}{2}kx^2$

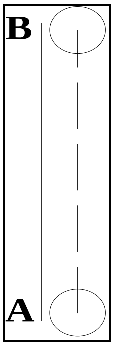
Il lavoro è pari all'area indicata in figura.

Il lavoro per allungare la molla da x_1 a x_2 è dato da

$L = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$.

ENERGIA CINETICA ED ENERGIA GRAVITAZIONALE

Considero una palla che rimbalza elasticamente, tornando sempre alla stessa altezza, in assenza di attrito.Il lavoro può essere espresso equivalentemente come differenza di energie cinetiche o potenziali gravitazionali.



$L = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$; $\mathrm{L = mgh_B - mgh_A}$, quindi: $mgh_B - mgh_A = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Essendo A e B due punti qualsiasi della traiettoria, possiamo affermare che: $\mathrm{E_c + E_g} =$ costante, in ogni punto del moto, cioè l'energia totale si "conserva", si mantiene costante nel tempo.

Caso particolare:

$B = h_{\max}$	$A = h_{\min} = 0$
$V_B = 0$	$V_A = \max$
$E_c = 0$	$E_c = \max$
$E_g = \max$	$E_g = 0$
$E_g = mgh_{\max}$	$E_c = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$

Dato che vale il principio della conservazione dell'energia, allora deve essere $\mathrm{E_A = E_B}$, cioè l'energia cinetica massima deve essere uguale all'energia potenziale gravitazionale massima: $\mathrm{mgh_{max}} = \frac{1}{2}\mathrm{mv^2_{max}}$, da cui: $\mathrm{h_{max}} = \frac{\mathrm{v}^2}{2\mathrm{g}}$; $v_{\max} = \sqrt{2gh}$, formule già note dalla cinematica.

ENERGIA CINETICA ED ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

Consideriamo l'oscillatore armonico.

$$E_c = 0, E_{el} = \max$$

$$E_c = \max, \; E_{el} = 0$$

$$E_c = 0, E_{el} = \max$$

La somma dell'energia elastica e dell'energia cinetica è costante in ogni punto del moto:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \cos t$$

In particolare l'energia elastica massima dovrà essere uguale all'energia cinetica massima:

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Da cui si ricava che: $v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}x_{max} = \omega A$, formula già nota dallo studio del moto armonico e dell'oscillatore inerziale.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Nei due casi analizzati precedentemente si è considerato nullo o trascurabile l'effetto dell'attrito o di altre forze agenti. Un sistema fisico ideale che non abbia interazioni con l'esterno, che non scambi cioè né materia, né lavoro, né calore con l'ambiente è detto sistema isolato.

IN UN SISTEMA ISOLATO LA SOMMA DI ENERGIA CINETICA, ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE ED ENERGIA POTENZIALE ELASTICA È COSTANTE.
Quindi: L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA IN UN SISTEMA ISOLATO.

QUANTITÀ DI MOTO

Si definisce quantità di moto il prodotto della massa per la velocità $\vec{q} = m \cdot \vec{v}$, è una grandezza vettoriale ha direzione e verso concordi a $\vec{v}$. Si misura in Kg . m /s.
In un sistema di più corpi la quantità di moto totale è data dalla somma vettoriale delle singole quantità di moto.

TEOREMA DELL'IMPULSO

Se $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ e $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ allora $\vec{F} = \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t}$ da cui si ottiene $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$, che è un altro enunciato del 2° principio. La forza è pari alla variazione della quantità di moto nel tempo.
L'impulso della forza è dato dal prodotto della forza per l'intervallo di tempo:

$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$, cioè:

$\vec{F} \cdot \Delta t = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$ Teorema dell'impulso:

l'impulso della forza è uguale alla differenza tra la quantità di moto finale e quella iniziale. Con una forza di grande intensità agente per un breve intervallo di tempo si ottiene la stessa variazione di velocità che si otterrebbe con una forza piccola agente per un intervallo di tempo più lungo.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Diciamo che un sistema è isolato se su di esso non sono applicate forze esterne o se la loro risultante è nulla.

<u>In un sistema isolato la quantità di moto è costante</u>.

Infatti: $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$. Se $\vec{F} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{q} = 0 \Rightarrow \vec{q} =$costante.

In particolare la quantità di moto totale iniziale è uguale alla quantità di moto totale finale.

URTI

Un urto è una breve interazione di grande intensità tra due o più corpi.
Dato che negli urti agiscono forze di grande intensità per un brevissimo tempo, le forze esterne diventano trascurabili, pertanto:
ogni urto può essere considerato un sistema isolato, quindi in qualunque urto vale sempre il principio di conservazione della quantità di moto.

Gli urti si dividono in elastici e anelastici:

- negli urti elastici si conserva l'energia cinetica
- negli urti anelastici non si conserva l'energia cinetica.

Un esempio di urto perfettamente elastico è quello di due corpi che rimbalzano uno contro l'altro (palle da biliardo); un esempio di urto perfettamente anelastico è quello di un corpo che rimane conficcato nell'altro (una freccetta nel tiro al bersaglio). Nella realtà non si hanno mai urti perfettamente elastici o anelatici ma alcuni possono esser considerati tali in prima approssimazione.

URTI IN UNA DIMENSIONE

Si dicono anche urti centrali; avvengono frontalmente tra corpi le cui velocità appartengono tutte alla stessa retta.

RISOLUZIONE DEGLI URTI ANELASTICI

Si risolvono con la sola applicazione del principio di conservazione della quantità di moto. Nel caso i due corpi rimangano attaccati, dopo l'urto si avrà un unico corpo di massa pari alla somma delle masse. Quindi:

$$m_1 \cdot v_{1iniz} + m_2 \cdot v_{2iniz} = (m_1 + m_2) \cdot v_{fin}$$

RISOLUZIONE DEGLI URTI ELASTICI

Si risolvono con l' applicazione del principio di conservazione della quantità di moto e del principio di conservazione dell'energia, in quanto in tutti gli urti si conserva la quantità di moto e negli urti perfettamente elastici si conserva anche l'energia cinetica.
L'urto elastico si risolve quindi con un sistema dato dalla conservazione della quantità di moto e dalla conservazione dell'energia cinetica:

$$\begin{cases} \mathrm{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2} \\ \frac{1}{2}\mathrm{m_1 v_1^2} + \frac{1}{2}\mathrm{m_2 v_2^2} = \frac{1}{2}\mathrm{m_1 V_1^2} + \frac{1}{2}\mathrm{m_2 V_2^2} \end{cases}$$

quindi raccogliendo m_1 ed m_2 otteniamo:

$$\begin{cases} \Rightarrow \\ m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \\ m_1(v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = m_2(V_2 - v_2)(V_2 + v_2) \end{cases}$$

Dividendo termine a termine, si ottiene:

$$\begin{cases}(v_1+V_1)=(v_2+V_2)\\ m_1(v_1-V_1)=m_2(V_2-v_2)\end{cases}$$ <u>sistema risolvente l'urto elastico</u>

Nella divisione abbiamo eliminato le possibili soluzioni: $(v_1 - V_1) = 0$ e $(V_2 - v_2) = 0$.
Tali soluzioni non hanno interesse fisico poichè il loro significato è che le velocità restano immodificate, cioè, in pratica, non è avvenuto l'urto.

Caso particolare:

Se i due corpi hanno la stessa massa, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases}(v_1+V_1)=(v_2+V_2)\\ (v_1-V_1)=(V_2-v_2)\end{cases}$$

da cui si ottengono facilmente le soluzioni.
$V_1 = v_2$ e $V_2 = v_1$.
Ciò significa che i due corpi si sono scambiati le velocità.
In particolare, se il primo dei due era inizialmente fermo, dopo l'urto, si avrà che l'altro corpo si ferma e il primo parte con la stessa velocità che aveva il secondo prima dell'urto.

Urto obliquo
Se una palla da biliardo ne urta obliquamente un'altra identica inizialmente ferma, si può verificare facilmente che le due velocità dopo l'urto sono tra loro perpendicolari.
Essendo $v_1 = v_1, v_2 = 0$, applicando la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica si ha:

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}\\ v_1^2=V_1^2+V_2^2\end{cases}$$

Come si può vedere dal disegno, per la regola del parallelogramma e per il teorema di Pitagora, si ha che le due velocità finali sono tra loro perpendicolari.

URTI ANELASTICI IN DUE DIMENSIONI

Si scompongono le velocità nelle direzioni x ed y e si applica il principio di conservazione della quantità di moto per le componenti x e per le componenti y.

$$m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = (m_1 + m_2) \cdot V_x$$
$$m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} = (m_1 + m_2) \cdot V_y$$

La velocità finale dei due corpi attaccati sarà in modulo: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

URTI ELASTICI IN DUE DIMENSIONI

Analogamente si risolve il sistema trovato precedentemente per le componenti x e per le componenti y:

$$\begin{cases} v_{1x} + V_{1x} = v_{2x} + V_{2x} \\ m_1 (v_{1x} - V_{1x}) = m_2 (V_{2x} - v_{2x}) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_{1y} + V_{1y} = v_{2y} + V_{2y} \\ m_1 (v_{1y} - V_{1y}) = m_2 (V_{2y} - v_{2y}) \end{cases}$$

CENTRO DI MASSA

E' il punto in cui si può considerare sia applicata la massa di un sistema di più corpi.
E' un concetto più generale di quello di baricentro, in quanto vale per sistemi di corpi tra loro staccati.
In un sistema di riferimento opportuno, essendo assegnati i vettori posizione $\vec{r_i}$ delle masse componenti il sistema, si ha che il vettore posizione del centro di massa è:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + ... m_N \vec{r_N}}{m_1 + m_2 + ... m_N}$$

Consideriamo un caso semplificato in cui vi siano due sole masse che si muovono su una retta. Le loro posizioni sono definite dalla sola coordinata x. La posizione del centro di massa sarà quindi per definizione:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

Se le masse si spostano per un intervallo di tempo Δt, la nuova posizione del centro di massa dopo tale tempo Δt, sarà:

$$X' = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

Sottraendo la (1) dalla (2), si ha:

$$\Delta X = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2}$$

e dividendo tutto per Δt:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Di conseguenza:

$$\boxed{(m_1 + m_2) V = m_1 v_1 + m_2 v_2}$$

Cioè la quantità di moto totale del sistema di masse è pari al prodotto della velocità del centro di massa per la massa totale del sistema.
Ciò significa che si può immaginare che la massa totale del sistema sia concentrata nel centro di massa e si sposti con la velocità del centro di massa.
In un sistema isolato si è visto che la quantità di moto totale si conserva: di conseguenza la velocità del centro di massa è costante, cioè il centro di massa di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme. E' allora sempre possibile scegliere un sistema di riferimento in cui il centro di massa sia fermo. Ciò può semplificare molto lo studio del moto di sistemi complessi di particelle.

MOMENTO ANGOLARE

Data una particella di massa m e velocità v, si definisce momento angolare o momento della quantità di moto il vettore $\vec{l} = \vec{r} \Lambda m\vec{v}$. In modulo $l = mvb$

Se considero il moto circolare, il momento angolare rispetto al centro è sempre massimo perché $\vec{v} \perp \vec{r}$. Quindi in modulo l = mvr.

Se ho un sistema di particelle rotanti il momento angolare totale è dato dalla somma vettoriale dei singoli momenti. In particolare se ho un oggetto rotante attorno ad un asse posso immaginarlo composto da tante particelle che girano tutte con la stessa velocità angolare ω. Tutti i momenti angolari hanno stessa direzione e stesso verso, quindi il modulo del momento angolare totale è dato dalla somma dei moduli.

$$L = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + ... + m_N v_N r_N$$

essendo nel moto circolare $v = \omega r$, si ottiene:

$$L = \omega \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_N r_N^2 \right)$$

cioè $L = I\omega$.

La grandezza tra parentesi viene indicata con **I** ed è il momento di inerzia; esso è la grandezza corrispondente alla massa inerziale in un moto rotatorio, cioè rappresenta la tendenza di un corpo ad opporsi alla rotazione. Dipende dalla massa ed inoltre dalla distanza di questa dall'asse di rotazione.
Ogni corpo avrà quindi momento di inerzia diverso a seconda dell'asse di rotazione prescelto.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Quando in un sistema di corpi il momento delle forze è nullo, allora il momento angolare è costante.

Il secondo principio della dinamica può essere scritto come: $F = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, cioè la forza è la variazione della quantità di moto nel tempo.

Si ha una relazione analoga tra momento della forza e momento della quantità di moto: $M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$, cioè il momento della forza è la variazione del momento angolare nel tempo.

Pertanto se M = 0, allora: ΔL = 0, cioè L = costante.

Se L = I ω = costante, si ha che I ed ω sono inversamente proporzionali. Aumentando I diminuisce la velocità angolare e viceversa. Si pensi a una pattinatrice: quando desidera ruotare su stessa più rapidamente diminuisce il momento di inerzia avvicinando le braccia all'asse di rotazione, se invece allarga le braccia, cioè allontana la massa dall'asse di rotazione, aumenta I e di conseguenza diminuisce la velocità angolare.

Il principio di conservazione del momento angolare vale in particolare nei sistemi detti "sistemi di forze centrali". Infatti in tali sistemi, essendo la forza sempre parallela ad $\vec{r}$, il momento della forza è sempre nullo.

Un esempio di sistema di questo tipo è il sistema solare. Il vettore posizione $\vec{r}$ congiunge il pianeta al sole, considerato come centro del moto. La forza di attrazione gravitazionale è sempre sovrapposta ad $\vec{r}$. Quindi il prodotto vettoriale $\overrightarrow{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ è sempre nullo. Vale quindi il principio di conservazione del momento angolare.