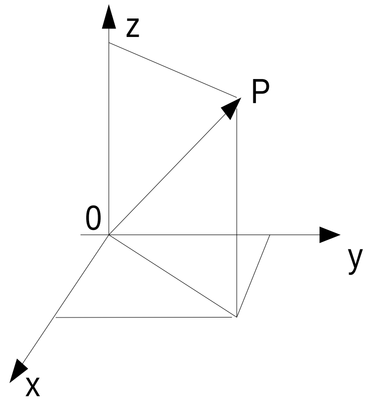
COORDINATE CARTESIANE NELLO SPAZIO

Assegnato un sistema di coordinate cartesiane (x, y ,z) di origine O (0,0,0), ogni punto dello spazio ha posizione associata al vettore:



OP = x **i** + y **j** + z **k**

Distanza di due punti

Dati due punti P_1 e P_2, essendo

OP_1= x_1 **i** + y_1 **j** + z_1 **k**

OP_2= x_2 **i** + y_2 **j** + z_2 **k**

il vettore P_1P_2 è il vettore differenza tra OP_1 e OP_2:

P_1P_2 = (x_2 - x_1) **i** + (y_2 - y_1) **j** + (z_2 -z_1)**k**

Il modulo di tale vettore rappresenta la distanza tra P_1 e P_2:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Punto medio

Le coordinate del punto medio M tra due punti P_1 e P_2, sono la semisomma delle coordinate omonime:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Baricentro

Le coordinate del baricentro di n punti sono date dalla media aritmetica delle coordinate omonime.

Punti simmetrici

Dato P (x, y, z) le coordinate di un punto simmetrico di P

rispetto all'origine sono: (-x, -y, -z)

rispetto all'asse x sono: (x, -y, -z)

rispetto all'asse y sono: (-x, y, -z)

rispetto all'asse z sono: (-x, -y, z)

rispetto al piano (x,y) sono: (x, y, -z)

rispetto al piano (x,z) sono: (x, -y, z)

rispetto al piano (y,z) sono: (-x, y, z)

EQUAZIONI DEL PIANO

Un piano nello spazio è definito in modo univoco assegnando due vettori (che ne determinano la giacitura) e un punto appartenente al piano:

$\mathbf{r} = (l, m, n)$ $\mathbf{r}' = (l', m', n')$ $P_0 (x_0, y_0, z_0)$

Se P (x, y, z) è il generico punto del piano, il vettore PP_0 appartiene al piano e pertanto è complanare con $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$. Il vettore PP_0 può essere scritto come combinazione lineare di $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$.

$PP_0 = k\,\mathbf{r} + h\,\mathbf{r}'$

In componenti:

$$\begin{cases} x - x_0 = kl + hl' \\ y - y_0 = km + hm' \\ z - z_0 = kn + hn' \end{cases} \quad \text{quindi} \quad (*) \quad \begin{cases} x = x_0 + kl + hl' \\ y = y_0 + km + hm' \\ z = z_0 + kn + hn' \end{cases}$$

Le equazioni (*) sono le **equazioni parametriche del piano**, dove i parametri *k, h* appartengono ad R. Considerando il vettore

$$\overline{n} = \overline{r} \times \overline{r'}$$

è noto, per definizione di prodotto vettoriale, che esso è ortogonale al piano π su cui giacciono i vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$.
Quindi qualunque vettore del piano π è ortogonale a **n**. Se P e P_0 sono punti del piano, il prodotto scalare tra il vettore PP_0 e **n** deve essere nullo:

$$\left(P - P_0\right) \cdot \overline{n} = 0$$

Si trova così l'**equazione vettoriale del piano:** $$\left(P - P_0\right) \cdot \left(\overline{r} \times \overline{r'}\right) = 0$$

che esprime la condizione di complanarità tra i vettori PP_0, $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ equivalente all'annullarsi del prodotto misto, cioè del determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli rispetto alla prima riga, i complementi algebrici sono:

$$a = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \qquad b = -\begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$$

Si ricava l'equazione: $$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) + c\left(z - z_0\right) = 0$$

e quindi la seguente:

$$ax + by + cz + d = 0$$ **equazione cartesiana del piano**

Si osservi che a, b, c sono le componenti del prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$.
Pertanto il vettore **n** = a **i** + b **j** + c **k** = **r** x **r'** è un vettore ortogonale al piano.

PIANI PARALLELI

Due piani sono paralleli se sono paralleli i loro vettori normali, cioè se: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

Se

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1}$ i due piani sono coincidenti.

Dato un punto P_0 (x_0, y_0, z_0) e il piano π: $ax + by + cz + d = 0$, il piano parallelo a π passante per P_0 ha equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Infatti tale piano deve essere a sua volta ortogonale al vettore **n** = a**i** + b**j** + c**k** , inoltre le coordinate (x_0, y_0, z_0) del punto P_0 devono soddisfare l'equazione.

PIANI PERPENDICOLARI

Due piani

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{e} \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

sono ortogonali tra loro se sono ortogonali i loro vettori normali, cioè se:

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

PIANO PER TRE PUNTI

Dati i punti P_1 (x_1, y_1, z_1), P_2 (x_2, y_2, z_2), P_3 (x_3, y_3, z_3), detto P (x, y, z) il generico punto del piano passante per P_1, P_2, P_3, i vettori $P - P_1$, $P_2 - P_1$, $P_3 - P_1$ sono complanari, quindi dal calcolo del determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

si ricava l'equazione cartesiana del piano passante per P_1, P_2, P_3.

PIANI PARTICOLARI

Le equazioni x = k, y = k, z = k rappresentano piani ortogonali rispettivamente all'asse x, y, z.

x = 0 è l'equazione del piano yz
y = 0 è l'equazione del piano xz
z = 0 è l'equazione del piano xy

L'equazione ax + by + cz = 0 rappresenta un piano passante per l'origine degli assi.

L'equazione ax + by + d = 0 rappresenta un piano parallelo all'asse z.
L'equazione ax + by = 0 rappresenta un piano passante per l'asse z.

L'equazione ax + cz + d = 0 rappresenta un piano parallelo all'asse y.
L'equazione ax + cz = 0 rappresenta un piano passante per l'asse y.

L'equazione by + cz + d = 0 rappresenta un piano parallelo all' asse x.
L'equazione by + cz = 0 rappresenta un piano passante per l'asse x.

SISTEMA DI DUE PIANI

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \end{cases}$$

Con il teorema di Rouché-Capelli è possibile determinare il numero di soluzioni del sistema:

- nessuna soluzione: piani paralleli

- ∞^1 soluzioni: i due piani si intersecano secondo una retta

- ∞^2 soluzioni: i due piani coincidono

Distanza di un punto P(x_0, y_0, z_0) da un piano ax + by + cz +d = 0

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Fascio di piani

Dati due piani distinti α e α_1 di equazioni:

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

il fascio di piani generato da α e α_1 è rappresentato dall'equazione:

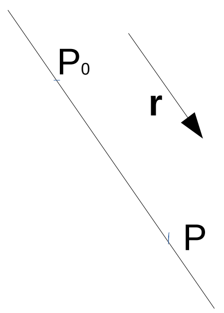
$$(ax + by + cz + d) + k(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) = 0$$

con k parametro reale.
Se i due piani sono incidenti lungo una retta tutti i piani del fascio passano per quella retta (fascio proprio).
Se i due piani sono paralleli, tutti i piani del fascio sono paralleli (fascio improprio).
In questo secondo caso è più opportuno scrivere il fascio come:

$$ax + by + cz + k = 0$$

Rappresentazione della retta nello spazio
Equazioni parametriche

Dati un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e un vettore **r** *(l, m, n)*, è univocamente determinata la retta t passante per P_0 parallela al vettore **r**.



Se P è il generico punto della retta, il vettore $P - P_0$ deve essere parallelo al vettore r. Pertanto:
$P - P_0 = t\,\mathbf{r}$
In componenti:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche della retta; *l, m, n* sono detti *parametri direttori* della retta.

Equazioni frazionarie o in forma normale

Ricavando *t* dalle tre equazioni e uguagliando si ottengono le equazioni:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

Questa rappresentazione è possibile se *l, m, n* sono tutti diversi da 0.

Casi particolari:

Nel caso, ad esempio, che *n* sia nullo, si avrebbe $z = z_0$.
Pertanto la retta può essere rappresentata dal sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m} \\ z=z_0 \end{cases}$$

Poichè z è costante, la retta giace in un piano parallelo al piano (x,y).

Nel caso che m, n siano entrambi nulli si avrebbe:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$$

La retta è parallela all'asse x.
In tal caso la rappresentazione può essere limitata a:

$$\begin{cases} y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$$

La retta è l'intersezione di due piani, uno perpendicolare all'asse y, l'altro perpendicolare all'asse z.

Equazione di una retta passante per due punti noti

Se si conoscono due punti della retta: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, ovviamente la retta è parallela la vettore $P_o P_1$.
I parametri direttori possono quindi essere calcolati come:

$$l=x_1-x_0 \qquad m=y_1-y_0 \qquad n=z_1-z_0$$

Quindi l'equazione della retta passante per i due punti è data da:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Equazioni in forma ridotta

Dalle equazioni frazionarie si ricava il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{z-z_0}{n} \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

Possiamo porre n = 1. L'ipotesi non è restrittiva in quanto le terne di parametri direttori che rappresentano uno stesso vettore sono infinite e del tipo *(kl, km, kn).*
Si ottiene:

$$\begin{cases} x=lz+p \\ y=mz+q \end{cases}$$

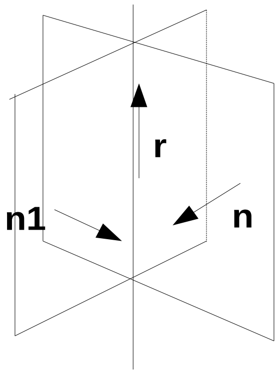
In questo modo la retta è data dall'intersezione di due piani, uno parallelo all'asse y e uno parallelo all'asse x.

Equazioni generali della retta

Poichè l'intersezione di due piani π e π_1 non paralleli e non coincidenti è una retta, la forma più generale di rappresentazione della retta è data dal sistema delle equazioni di due piani:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \end{cases}$$

Parametri direttori della retta intersezione di due piani



Considerati i due piani π e π_1 è noto che i vettori:

$$\vec{n}(a,b,c) \qquad \vec{n_1}(a_1,b_1,c_1)$$

sono perpendicolari ai rispettivi piani.

Il prodotto vettoriale $\vec{r}=\vec{n}\times\vec{n_1}$

è quindi parallelo alla retta r intersezione dei due piani.

I parametri direttori della retta r si possono quindi calcolare come componenti del prodotto vettoriale **n** x **n**$_1$:

$$l=\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \qquad m=\begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad n=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

Equazione della retta intersezione dei due piani in forma normale

Volendo scrivere la retta intersezione dei due piani in forma normale, avendo calcolato i parametri direttori, è sufficiente individuare un punto Po qualunque della retta.
Si può, ad esempio, scegliere a caso un valore per la z (ex. z = 0) e sostituirlo nelle equazioni generali.
Si trova un sistema in x e y, dalla cui soluzione si ricava il punto Po *(x_0, y_0, z_0)*.
Si può quindi scrivere la retta come:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

Parallelelelismo tra retta e piano

Consideriamo il piano π : $ax+by+cz+d=0$

e la retta r:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

le coordinate di un eventuale punto di intersezione devono soddisfare l'equazione:

$$ax_0+by_0+cz_0+d+\left(al+bm+cn\right)t=0$$

che si ottiene sostituendo x, y, z nell'equazione del piano.

Se il termine $$al + bm + cn \neq 0$$

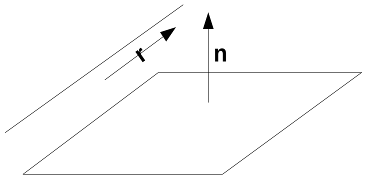
si può ricavare $$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{al + bm + cn}$$

e sostituendo questo valore di t nelle equazioni parametriche della retta si ricava il punto cercato di intersezione tra retta e piano.
Se $al + bm + cn = 0$, si hanno due casi:

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$ non esiste nessun valore di t quindi retta e piano sono paralleli

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ esistono infiniti valori di t, cioè la retta r appartiene al piano.

In definitiva, la condizione di parallelismo tra retta e piano
è data da: $\boxed{al + bm + cn = 0.}$



Tale condizione si poteva ricavare immediatamente considerando che, se la retta è parallela al piano, il vettore **r** *(l, m, n)* è perpendicolare al vettore **n** *(a, b, c).*

………

Se la retta è rappresentata in forma generale:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

la condizione di parallelismo con un piano π 2 : $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$
è data da:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

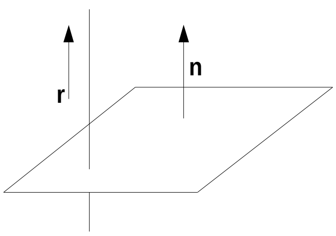
condizione che sta ad indicare la complanarità dei vettori normali ai tre piani considerati, ciò equivale a dire che tutti e tre i piani sono paralleli ad uno stesso vettore. Pertanto l'intersezione dei primi due è una retta parallela al terzo piano.

………

Perpendicolarità tra retta e piano

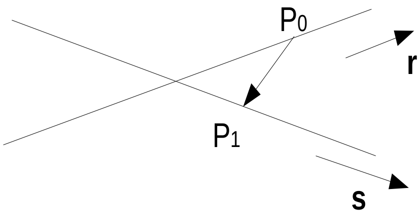
Consideriamo il piano π : $$ax + by + cz + d = 0$$

e la retta: $$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$



Essendo **n** *(a, b ,c)* un vettore perpendicolare al piano π e **r** *(l ,m ,n)* un vettore parallelo alla retta r, piano e retta saranno ortogonali se **n** ed **r** sono paralleli, quindi se: $$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

Complanarità di due rette
(in forma parametrica)



La retta r è associata al vettore **r** *(l, m, n).*
La retta s è associata al vettore **s** *(l', m', n').*

Po è un punto di r e P_1 un punto di s.
Se le rette r ed s sono complanari, i vettori P_1 - Po , **r , s** sono complanari.

La condizione di complanarità delle due rette pertanto è data da:

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

Se le due rette sono complanari e sono anche perpendicolari, oltre alla condizione (*) deve valere:

ll' + mm'+ nn' = 0

....

Area di un triangolo

Senza dimostrarla, scriviamo la formula per il calcolo dell'area di un triangolo, noti i vertici:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2}$$