SUCCESSIONI E PROGRESSIONI

LE SUCCESSIONI NUMERICHE

Una successione numerica *a* è una funzione che associa ad ogni numero naturale *n* un numero reale a_n :

$$a : N \to R$$
$$n \mapsto a_n$$

Rappresentiamo con *n* la variabile indipendente, che si dice **indice della successione**, con a_n la variabile dipendente, $a_n = a(n)$, che si dice **termine della successione.**

Una successione è dunque costituita da un insieme di numeri ordinato ed infinito:
$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots a_n, \ldots$

ESEMPIO

La successione costituita da tutti i quadrati dei numeri naturali è una funzione *a* che associa a ogni numero naturale il suo quadrato.

$$a : N \to R$$
$$n \mapsto a_n = n^2$$
$$0 \mapsto a_0 = 0^2 = 0$$
$$1 \mapsto a_1 = 1$$
$$2 \mapsto a_2 = 4$$
$$3 \mapsto a_3 = 9.....$$

Vi sono diversi modi per individuare una successione:

per enumerazione

Si indicano i primi cinque o sei termini seguiti dai puntini di sospensione.

Es. 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, ….. è la successione dei multipli di 10.

mediante espressione analitica

Si scrive esplicitamente la relazione che lega l'indice *n* e il termine a_n

Es

$$a_n = 10 \cdot n, \quad n \in N$$
$$a_n = \frac{2n+1}{n}, \quad n \in N - \{0\}$$

mediante una formula ricorsiva

Consiste nel dare il primo elemento della successione e una legge con cui determinare un elemento a partire, per esempio, dal precedente.

Es. la successione :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n} \quad n \geq 2, \end{cases}$$ è costituita dai seguenti termini : $1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{24}, \quad .....$

Principio di induzione

Una proprietà, dipendente da un numero naturale n, è ritenuta vera per ogni n, se sono verificate le seguenti condizioni:

- la proprietà è vera per n =1 (base dell'induzione)
- dall'ipotesi che la proprietà sia vera per n = k , segue che è vera anche per n = k+1 (ipotesi di ricorrenza).

Esempio
Dimostrare che per ogni n il numero $10^n - 1$ è divisibile per 9.
Per n = 1 si ha $10^1 - 1 = 9$ che è divisibile per 9.
Supponiamo poi che $10^k - 1$ sia divisibile per 9.
$10^{k+1} - 1 = 10^k \cdot 10 - 1 = 10^k \cdot 10 - 10 + 9 = 10 \cdot (10^k - 1) + 9$ è divisibile per 9 per l'ipotesi fatta.

LE PROGRESSIONI ARITMETICHE

<u>Una successione numerica si dice progressione aritmetica quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante.</u>
La differenza costante fra un termine e il suo precedente viene chiamata **ragione** della progressione e viene indicata con *d.*

Molto spesso capita di considerare un numero finito di termini consecutivi della progressione. In tal caso il primo e l'ultimo termine di questo insieme ordinato sono detti **estremi** della progressione.

Esempi :	3,	7,	11,	15,	19,	23		progressione aritmetica di ragione 4
	5/2,	2,	3/2	1,	1/2	0	-1/2	progressione di ragione -1/2

Teorema
In una progressione aritmetica il termine a_n è uguale alla somma del primo termine a_0 con il prodotto della ragione *d* per *n:*

$$\boxed{a_n = a_0 + n \cdot d}$$

oppure, se si considera come primo termine a_1 :

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Dimostrazione per induzione (caso primo termine a_0)
Per n = 0 la proprietà è vera $a_0 = a_0 + 0 \cdot d$.
Supponiamo sia vera per n = k :

$$a_k = a_0 + kd$$

Per la definizione di progressione aritmetica, $a_{k+1} = a_k + d$, sostituendo il valore di a_k si ottiene

$$a_{k+1} = a_k + d = a_0 + kd + d = a_0 + (k+1)d$$

Teorema
Se a_r e a_s sono due termini qualunque della progressione aritmetica, risulta: $a_s = a_r + (s-r) \cdot d$.

Dimostrazione
Infatti per il teorema precedente $a_s = a_0 + s \cdot d$ e $a_r = a_0 + r \cdot d$ sottraendo membro a membro si ottiene $a_s - a_r = s \cdot d - r \cdot d$

Definizione
In una progressione aritmetica finita di termini estremi a_0 e a_n i termini *f* e *g* si dicono *equidistanti* dagli estremi quando il numero dei termini della progressione che precedono *f* è uguale al numero di termini che seguono *g*.

Teorema
In una progressione aritmetica finita la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed è uguale alla somma dei termini estremi.

Es 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 28
13 e 22 sono equidistanti.
13 + 22 = 35 = 7 + 28

Infatti se k è il numero di termini che precedono f, e che quindi seguono g, si ha che:

$f = a_0 + k \cdot d$ e $g = a_n - k \cdot d$ per cui si ha la tesi.

Teorema
La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale alla semisomma dei termini estremi a_0 e a_{n-1} moltiplicata per il numero n dei termini:

$$\boxed{S_n = \frac{a_0 + a_{n-1}}{2} \, oppure \, \frac{a_1 + a_n}{2} n}$$

LE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

<u>Una successione numerica si dice progressione geometrica quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante.</u>
Il quoziente costante fra un termine e il suo precedente viene chiamato **ragione** della progressione e viene indicato con *q*.

Molto spesso capita di considerare un numero finito di termini consecutivi della progressione. In tal caso il primo e l'ultimo termine di questo insieme ordinato sono detti **estremi** della progressione.

Esempi : 7, 21, 63, 189, 567, … progressione geometrica di ragione 3

In una progressione geometrica un termine qualunque si ottiene dal precedente moltiplicando per q oppure dal seguente dividendo per q.
Da questa proprietà segue che in una progressione geometrica:
Se $q > 0$ i termini della progressione hanno tutti lo stesso segno
Se $q < 0$ i termini sono di segno alterno.

Se la progressione ha termini positivi:
Se q > 1 la progressione è crescente
Se q < 1 la progressione è decrescente
Se q = 1 la progressione è costante

Teorema
In una progressione geometrica il termine a_n è uguale al prodotto del primo termine a_0 per la potenza della ragione *q* con esponente *n*.
$\boxed{a_n = a_0 \cdot q^n}$
oppure, se si considera come primo termine a_1 :

$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

Dimostrazione (caso primo termine a_0)

Infatti, poiché ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicando per q:

$$a_1 = a_0 \cdot q$$
$$a_2 = a_1 \cdot q = a_0 \cdot q^2$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_0 \cdot q^3 \quad \ldots. \text{ ecc.}$$

Teorema

Se a_r e a_s sono due termini qualunque della progressione geometrica, risulta:

$\boxed{a_s = a_r \cdot q^{s-r}}$.

Dimostrazione

Infatti per il teorema precedente $a_s = a_0 \cdot q^s$ e $a_r = a_0 \cdot q^r$ dividendo membro a membro si ottiene $\frac{a_s}{a_r} = \frac{q^s}{q^r}$

Definizione

In una progressione geometrica finita di termini estremi a_0 e a_n i termini f e g si dicono equidistanti dagli estremi, quando il numero dei termini della progressione che precedono f è uguale al numero di termini che seguono g.

Teorema

In una progressione geometrica finita il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed è uguale al prodotto dei termini estremi.

Dimostrazione

Infatti se k è il numero di termini che precedono f, e che quindi seguono g, si ha che:

$f = a_0 \cdot q^k$ e $g = \frac{a_n}{q^k}$, moltiplicando membro a membro si ha $f \cdot g = a_0 \cdot a_n$

Teorema

La somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q diversa da 1 è espressa dalla seguente formula :

$\boxed{S_n = a_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$.

Dimostrazione

Si tratta di calcolare

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = a_0 + a_0 \cdot q^1 + a_0 \cdot q^2 + \ldots + a_0 \cdot q^{n-1} = a_0 \cdot \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right)$$

$$\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) = \frac{q^n - 1}{q - 1} (Ruffini)$$

Teorema

Il prodotto dei primi n termini di una progressione geometrica a termini positivi è dato dalla seguente formula:

$\boxed{P_n = \sqrt{(a_0 \cdot a_{n-1})^n}}$.