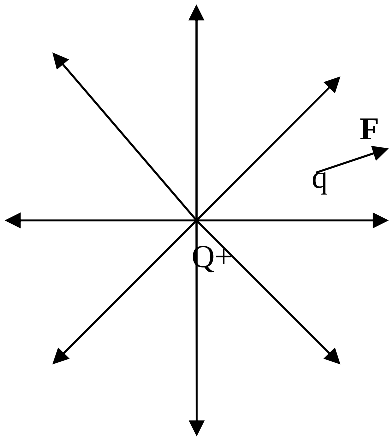
Moto di una carica in un campo elettrico

CAMPO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME



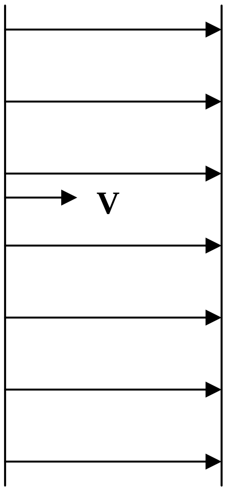
In questo caso $F = K\dfrac{Qq}{r^2}$. La forza non è costante.

La carica q, lasciata libera, subirà un'accelerazione diretta radialmente, di verso dipendente dal segno delle cariche Q e q.

L'accelerazione è: $a = K\dfrac{Qq}{mr^2}$, quindi il moto è vario con accelerazione decrescente al crescere di r.

CAMPO UNIFORME (condensatore piano)

Caso 1



Immetto una carica nel campo elettrico con velocità nulla o con velocità parallela al campo.

La forza sarà costante essendo **E** costante: $\vec{F} = q\vec{E}$ e l'accelerazione sarà: $\vec{a} = \dfrac{q\vec{E}}{m}$.

Il moto sarà <u>uniformemente accelerato</u> se la velocità iniziale è nulla o concorde col verso della forza elettrica agente su q, uniformemente decelerato se la velocità è di verso opposto al verso della forza.

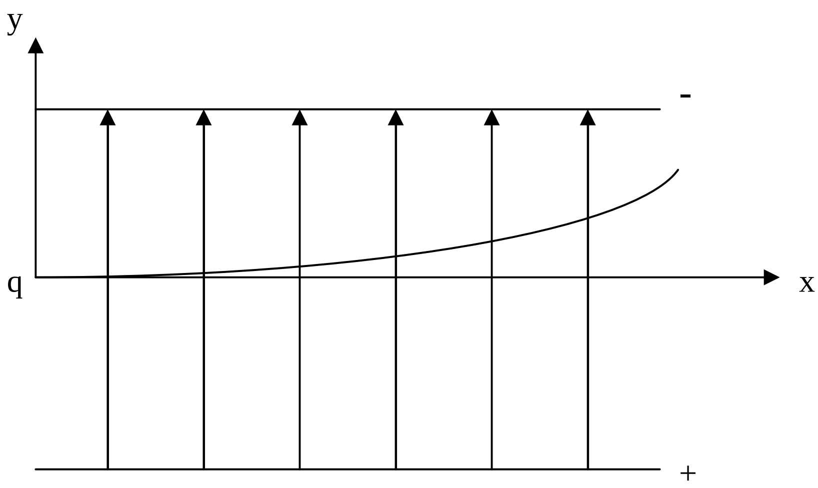
Caso 2

Immetto la carica nel campo elettrico con velocità perpendicolare al campo; avrò così una composizione di due moti:
-un moto uniforme nella direzione x
-un moto uniformemente accelerato nella direzione y con partenza da fermo (vedi caso 1)

Il comportamento è analogo a quello della caduta di un grave lanciato in orizzontale.
Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = \dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v} \\ y = \dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}\dfrac{x^2}{v^2} \end{cases}$$

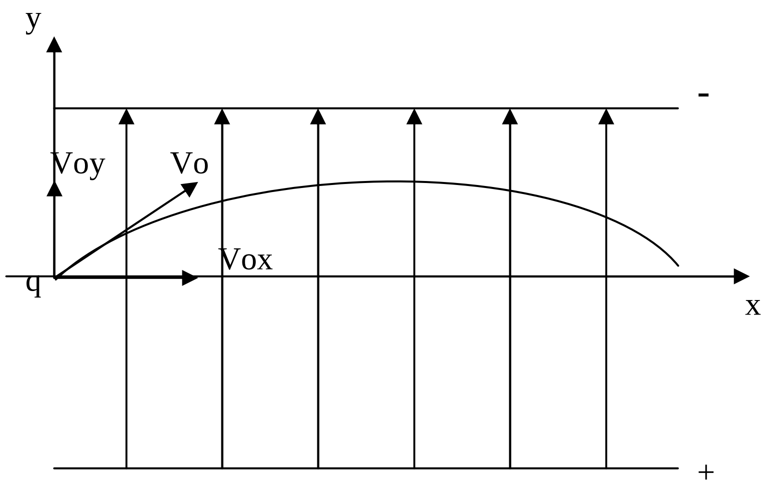
L'equazione: $y = \dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}\dfrac{x^2}{v^2}$ è del tipo $y = ax^2$, pertanto la traiettoria è <u>parabolica.</u>



Prof. Fabrizia De Bernardi

Caso 3

Immetto la carica nel campo elettrico con velocità obliqua rispetto al campo; avrò ancora la composizione di due moti:
-un moto uniforme nella direzione x con velocità costante Vox
-un moto uniformemente accelerato/decelerato nella direzione y con una velocità iniziale Voy.
Il comportamento è analogo a quello della caduta di un grave lanciato con un angolo di alzo α.
Ad esempio (vedi figura):



Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} x = v_{ox} t \\ y = v_{oy} t - \frac{1}{2}\frac{qE}{m} t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_{ox}} \\ y = \frac{v_{oy}}{v_{ox}} x - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{x^2}{v_{ox}^2} \end{cases}$$

L'equazione della traiettoria è del tipo $y = -ax^2 + bx$, che è l'equazione di una parabola passante per l'origine degli assi.

PROMEMORIA SINTETICO SU LAVORO, POTENZIALE E MOTO DI UNA CARICA

Considerata una carica che si sposta da un punto A ad un punto B di un campo elettrico, si ricorda che: $L = -\Delta U = -(U_B - U_A) = U_A - U_B = \int_{SA}^{SB} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Il lavoro dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale, quindi il campo elettrostatico è un campo di forze conservative.

La differenza di potenziale è definita come: $\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{L}{q}$. Quindi $L = -q\Delta V$.

CAMPO GENERATO DAUNA CARICA PUNTIFORME Q

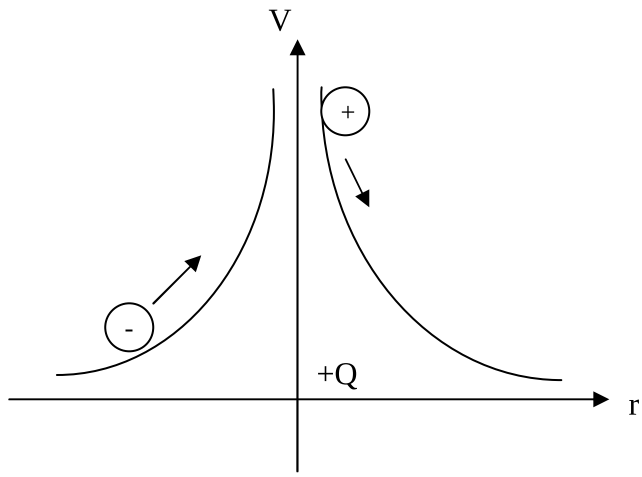
L'energia potenziale elettrostatica di due cariche Q e q poste a distanza r è $U = k\frac{Qq}{r}$.

Il potenziale a distanza r da Q è $V = k\frac{Q}{r}$ (avendo posto U e V pari a zero all' ∞)

Se Q è positiva, è facile vedere che il potenziale decresce allontanandosi da Q (V → 0 per r → ∞) e tende a ∞ avvicinandosi alla carica.

Cariche positive tendono naturalmente a spostarsi, cioè accelerare, da punti a potenziale maggiore a punti a potenziale minore, allontanandosi da +Q (il lavoro svolto dalla forza elettrica è positivo, $V_B - V_A$ è negativo, $U_B - U_A$ è negativo). "Scendono".

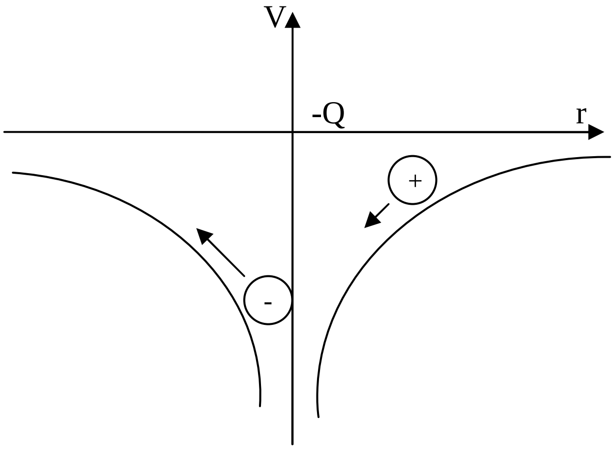
Le cariche negative "risalgono", cioè tendono naturalmente a spostarsi, cioè accelerare, da punti a potenziale minore a punti a potenziale maggiore. (il lavoro svolto dalla forza elettrica è positivo, $V_B - V_A$ è positivo, $U_B - U_A$ è negativo).



Se Q è negativa, è facile vedere che il potenziale in un punto è negativo; V aumenta allontanandosi da Q e tende a $-\infty$ avvicinandosi alla carica.

Cariche positive tendono ancora naturalmente a spostarsi, cioè accelerare, da punti a potenziale maggiore a punti a potenziale minore, avvicinandosi a -Q (il lavoro svolto dalla forza elettrica è positivo, $V_B - V_A$ è negativo, $U_B - U_A$ è negativo). "Scendono".

Le cariche negative "risalgono", cioè tendono naturalmente a spostarsi, cioè accelerare, da punti a potenziale minore a punti a potenziale maggiore allontanandosi da -Q. (il lavoro svolto dalla forza elettrica è positivo, $V_B - V_A$ è positivo, $U_B - U_A$ è negativo).

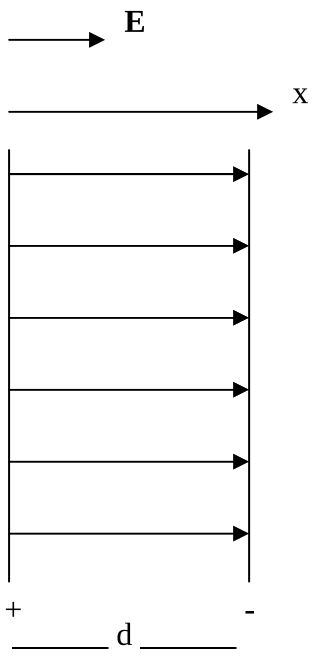


In generale tutte le cariche tendono a portarsi spontaneamente da energia potenziale maggiore a energia potenziale minore.

Quindi la variazione di energia potenziale è negativa, il lavoro svolto dal campo è positivo e pertanto è positiva la variazione dell'energia cinetica.

Si noti che il potenziale decresce sempre spostandosi nel verso delle linee del campo elettrico.

CAMPO UNIFORME (condensatore piano)



Il lavoro svolto dal campo per spostare una carica positiva q dall'armatura di sinistra a quella di destra è $L = qEd$.

Spostandosi da A a B, all'interno del campo, sarà:

$$L = qE\Delta x = qE\left(x_B - x_A\right)$$

La differenza di potenziale è $\Delta V = V_B - V_A = \dfrac{\Delta U}{q} = -\dfrac{L}{q}$.

$$L = -q\Delta V$$

Quindi:

$\Delta V = -E\Delta x$ da cui $E = -\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$.

Per cui il campo elettrico rappresenta la variazione di potenziale nell'unità di lunghezza.

Se il campo è uniforme, esso è costante in modulo, quindi il potenziale decresce linearmente nella direzione del campo (ad esempio diminuisce di 1Volt per ogni cm).

Si assume per convenzione che il potenziale sull'armatura di destra sia 0. Quindi se il potenziale sull'armatura positiva è V, la differenza di potenziale tra un punto della armatura positiva e uno dell'armatura negativa è – V.

Nella situazione rappresentata in figura, con E e x concordi, l'energia potenziale della carica in un punto è $U = -qEx$; se si cambia il verso dell'asse x, $U = qEx$.

……………………………………………………………………………………………………

In generale:

$L = -\Delta U$ è il <u>lavoro svolto dalla forza elettrica</u>.

Se è richiesto il lavoro svolto da altri "agenti", il segno dipenderà dal verso della forza applicata.

POTENZIALE E CAMPO ELETTRICO

La relazione corretta tra campo elettrico e potenziale è: $E = - grad\ V = -\nabla V$ (gradiente)

Cioè le componenti del vettore campo sono le derivate parziali del potenziale rispetto a x, y, e z.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

In generale la componente del campo nella direzione dello spostamento ds è : $E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$.

A. Se il campo è uniforme nella direzione x:

$$E = -\frac{dV}{dx} = \cos t$$

(se la derivata di una funzione è costante, la funzione è lineare, cioè il suo grafico è una retta)
Per ricavare V in un punto x si dovrà quindi calcolare l'integrale:

$$V = \int_0^V dV = -\int_0^x Edx = -Ex$$ (che è infatti l'equazione di una retta di coefficiente angolare – E)

La differenza di potenziale tra due punti A e B, sarà: $\Delta V = -E\Delta x$.

Se con Δx si intende la distanza tra due superfici equipotenziali successive e con ΔV la differenza di potenziale costante tra due superfici successive, si ha che: $\Delta x = -\frac{\Delta V}{E} = \cos t$, come ci si poteva attendere, essendo il potenziale decrescente in modo lineare spostandosi nella direzione del campo.

B. Se il campo è generato da una carica puntiforme:

Spostandosi nelle direzione di dr (solo la variazione della distanza dalla carica centrale modifica V), si ha:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{quindi} \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Per ricavare V in un punto a distanza r da Q si dovrà quindi calcolare l'integrale:

$$V = \int_0^V dV = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_\infty^r \frac{1}{r^2}dr = -\lim_{R\to\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} = k\frac{Q}{r}$$

La differenza di potenziale tra due punti A e B, sarà: $\Delta V = k\frac{Q}{r_B} - k\frac{Q}{r_A}$.

Se con ΔV si intende la differenza di potenziale costante tra due superfici equipotenziali successive e si vuole trovare come varia la distanza Δr tra tali superfici:

$$\Delta V = k\frac{Q}{r_B} - k\frac{Q}{r_A} = kQ\frac{r_A - r_B}{r_A r_B} = -kQ\frac{\Delta r}{r_B r_A} \quad \text{da cui} \quad \Delta r = -\frac{\Delta V}{kQ}r_A r_B = -Cr_A r_B$$

In questo caso quindi la distanza tra superfici equipotenziali successive, tra cui la ΔV è costante, aumenta, allontanandosi dalla carica Q, in ragione del quadrato di una distanza $r=\sqrt{r_A \cdot r_B}$, media geometrica tra r_A e r_B.