INTEGRALI

- Per trasformazione della f integranda: $\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = F[g(t)]+c$

  Es.: $\int sen^5x\cdot \cos x\,dx = \int sen^5x\,d\,senx = \frac{sen^6x}{6}+c$

- Scomposizione: Es.: $\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx = x-\ln|1+x|+c$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$ si cerca di trasformare il radicando in $\Delta\pm(x\pm K)^2$, $(x\pm K)^2\pm\Delta$ Poi ottenere un arcsen o un integrale noto

  Es.: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ $\quad x^2+2x+5=(x+1)^2+4 \longrightarrow \int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c$

- $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ si fa comparire al numeratore la derivata del denominatore, poi si scompone.

  Es.: $\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int\frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{2}\int\frac{4x+8}{2\sqrt{2x^2+8x+1}}dx - \frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} =$ $\quad (x^2+4x+4)-\frac{7}{2}$, $(x+2)^2-\sqrt{\frac{7}{2}}^2$

  $= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+c$

- Per cambiamento di variabile: Es.: $\int tg^4x\,dx$ pongo $tgx=t \rightarrow$ ricavo $\begin{cases} x=arctg\,t \\ dx=\frac{1}{1+t^2}dt\end{cases}$

  $\int\frac{t^4}{1+t^2}dt = \int\frac{(t^4-1)+1}{t^2+1}dt = \int(t^2-1)dt+arctg\,t+c = \frac{t^3}{3}-t+arctg\,t+c = \frac{tg^3x}{3}-tgx+x+c$

- Per parti: $(*)$ $\int u\cdot v'\,dx = uv-\int v\cdot u'\,dx$

  Es.: $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx$ pongo $u=\ln x$ $u'=\frac{1}{x}$ $v'=1$ $v=x$

  e sostituisco nella $(*)$: $\int\ln x\,dx = x\ln x-\int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx = x\cdot\ln x - x+c$

- FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

  I $\quad \int\frac{A}{(x-a)}dx = A\ln|x-a|+c$ $\qquad$ II $\quad \int\frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{1+n}}+c$

  III $\quad \int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx \longrightarrow$ ($\Delta<0$ radici complesse) si fa comparire a numeratore la derivata del denominatore, si scompone...

  Es.: $\int\frac{x-7}{x^2+3x+5}dx \longrightarrow \left(\begin{array}{l}D(x^2+3x+5)=2x+3\\ \text{radici complesse}\end{array}\right)$ $\quad = \frac{1}{2}\int\frac{2x-14}{x^2+3x+5}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x+3)-17}{x^2+3x+5}dx =$

  $= \frac{1}{2}\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx - \frac{17}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}d\left(x+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+5)-\frac{17}{\sqrt{11}}arctg\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}+c$

IV $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ (Formula ricorsiva)
$(x^2+px+q$ a radici complesse)

Es.: $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\overbrace{\frac{4}{3}}^{=2-\frac{2}{3}}}{(x^2+2x+10)^2}dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+10} - \int \frac{1}{(x^2+2x+10)^2}dx =$ per formula ricorsiva...

$\displaystyle = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+10} - \frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10} - \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + c$

V $\displaystyle\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx$ (radici reali e distinte $\Delta>0$)

Es.: $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\underbrace{x^2-x-2}_{=(x+1)(x-2)}}dx = \otimes$

Pongo $\displaystyle\frac{2x-3}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ trovo $A=\frac{5}{3}$ $B=\frac{1}{3}$

$\displaystyle\otimes = \frac{5}{3}\int \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{5}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c$

(Il procedimento si generalizza a qualsiasi frazione con denominatore di partenza di grado maggiore del numeratore. In caso contrario, si deve fare la divisione: $\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$)

VI $\displaystyle\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$ (radici reali multiple $\Delta=0$)

Es.: $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4}dx = \otimes$

Den. $=(x-1)(x-2)^2$ allora $\displaystyle\frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$ Trovo che $A=2$ $B_1=-2$ $B_2=5$

$\displaystyle\otimes = 2\ln|x-1| - 2\ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + c$

VII Radici complesse semplici

Es.: $\displaystyle\int \frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}dx$ Pongo $\displaystyle\frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

Calcolo $A=2$, $B=-2$, $C=-4$

$\displaystyle \ldots = \ln\frac{(x-2)^2}{(x^2+x+1)} - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$

VIII Radici complesse multiple

Es.: $\displaystyle\int \frac{x^6}{(x^2+1)^4}dx =$

$\displaystyle\frac{x^6}{(x^2+1)^4} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3} + \frac{A_4x+B_4}{(x^2+1)^4}$

Si calcolano tutti i coefficienti A, B e si scompone l'integrale iniziale in vari integrali