Esercizi su Matrici e Sistemi Linari

Notazioni: $|A|$ =det$A$, ${}^tA$ =trasposta di A, A^{-1} =inversa di A, rg(A)=rango di A.

1. Si considerino le matrici A e B definite da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \\ 6 & 13 & 81 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

   Calcolare $|A|$ e |B|

   - utilizzando la funzione DET di Derive;
   - riconducendolo al calcolo del determinante di una matrice triangolare mediante triangolazione di A e B;

2. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 5x + y - z = & 2 \\ 3x + 2y + 2z = & 5 \\ 2x - y - 2z = & -1 \end{cases}$$

   - col metodo della matrice inversa;
   - con il metodo di Cramer;
   - col metodo di eliminazione di Gauss;

3. Mediante applicazione del teorema di Rouché-Capelli, stabilire quali dei seguenti sistemi lineari sono possibili ed, in caso affermativo, determinare le soluzioni:

$$\text{(i)} \begin{cases} x + y + z + w = & 1 \\ 2x - y - z - w = & 2 \\ 6x + 7y + 2z - w = & 10 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} x + y = & 2 \\ x + 2y = & 3 \\ 2x + y = & 3 \\ 5x + 6y = & 11 \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} x + 2y + 3z = & 0 \\ 2x - y + z = & 0 \\ 6x + 7y + 13z = & 0 \end{cases}$$

(iv) $$\left\{\begin{array}{rr} x+4y+5z+5w= & -1 \\ 2x+y+3z+3w= & 10 \\ 3x+7y+10z+10w= & 17 \end{array}\right.$$

(v) $$\left\{\begin{array}{rr} 4x+2y+6z+4w= & 4 \\ x-2y-z+w= & 1 \\ x+2y+3z+w= & 1 \end{array}\right.$$

(vi) $$\left\{\begin{array}{rr} 3x_1+x_2-x_3-x_4-x_5= & 16 \\ x_1-10x_2+x_3+6x_4+2x_5= & -2 \end{array}\right.$$

Soluzione degli esercizi

1. Risulta $|A| = 636$ e $|B| = -18$.

2. Indichiamo qui e nel seguito con A la matrice dei coefficienti e con $C = (A|\mathbf{b})$ la matrice completa di ogni sistema lineare della forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b}$ è il vettore colonna dei termini noti. Risulta $|A| = 7 \neq 0$ cosicché A è invertibile ed il sitema ammette un'unica soluzione.

   Il vettore colonna soluzione è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ come si ottiene applicando ciascuno dei tre metodi.

3. Ricordiamo che il teorema di Rouché-Capelli fornisce il seguente risultato: *se* rg(A)=k=rg(C), *il sistema è possibile ed ammette* ∞^{n-k} *soluzioni ottenibili considerando come incognite solo quelle i cui coefficienti intervengono nel calcolo del rango e non considerando le equazioni rimanenti* (n *è il numero delle incognite*).

   Premesso ciò, passiamo ad esaminare i sistemi considerati.

   (i) Risulta rg(A)=3=rg(C) essendo

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

   per cui il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni e, considerando w come parametro reale, tali soluzioni verificano il sistema

   $$\begin{cases} x + y + z = & 1 - w \\ 2x - y - z = & 2 + w \\ 6x + 7y + 2z = & 10 + w \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3w+4}{5} \\ z = -\frac{4(2w+1)}{5} \end{cases}$$

   (ii) Risulta rg(A)=2 essendo

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

   Poiché la colonna dei termini noti è la somma delle colonne dei coefficienti delle incognite, i minori di ordine 3 di C hanno determinante nullo per cui rg(C)=2.

Dunque, rg(A)=3=rg(C) cosicché il sistema ammette un'unica soluzione ottenibile risolvendo il sistema equivalente in cui si eliminano le ultime due equazioni da quello dato:

$$\begin{cases} x+y= & 2 \\ x+2y= & 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

(iii) Il sistema dato è 3×3 omogeneo ed ammette un'unica soluzione se la matrice A ha rango massimo.

Risulta $|A|=0$ in quanto, in ciascuna equazione, i coefficienti di z sono la somma algebrica di quelli delle altre due incognite mentre

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4=-5\neq 0$$

cosicché rg(A)=2=rg(C) ed il sistema ammette $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni ottenibili considerando z come parametro reale ed eliminando la terza equazione ovvero risolvendo

$$\begin{cases} x+2y= & -3z \\ 2x-y= & -z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$$

(iv) Risulta rg(A)=2 essendo la terza colonna (coefficienti di z) la somma delle prime due ed uguale alla quarta (coefficienti di w) e

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-8=-9\neq 0$$

Si ha, poi, che

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 7 & 17 \end{vmatrix} = -80\neq 0$$

cosicché rg(C)= $3\neq 2$ =rg(A) per cui il sistema non è possibile.

(v) Risulta rg(A)=2=rg(C) poiché, in ciascuna equazione del sistema, il coefficiente di z è la somma algebrica dei coefficienti di x ed y, il coefficiente di w è uguale al coeffciente di x ed al termine noto ed, infine,

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8-2=-10\neq 0$$

Dunque, il sistema ammette $\infty^{4-2}=\infty^2$ ottenibili considerando z,w come parametri reali e non cosiderando la terza equazione:

$$\begin{cases} 4x+2y= & 4-6z-4w \\ x-2y= & 1+z-w \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1-z-w \\ y=-2z \end{cases}$$

(vi) Risulta rg(A)=2=rg(C) poiché sia A che C hanno 2 righe (il sistema è 3×5) e

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} = -30 - 1 = -31 \neq 0$$

Dunque, il sistema ammette $\infty^{5-2} = \infty^3$ ottenibili considerando x_3, x_4, x_5 come parametri reali:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = & 16 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 - 10x_2 = & -2 - x_3 - 6x_4 - 2x_5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9x_3+2(2x_4+4x_5+79)}{31} \\ x_2 = \frac{4x_3+19x_4+7x_5+22}{31} \end{cases} .$$