APPUNTI DI FISICA QUANTISTICA

Alla fine dell'800, con la sistemazione della teoria elettromagnetica da parte di Maxwell, la fisica sembrava aver inquadrato in modo esaustivo tutti i fenomeni naturali allora noti. Tra la fine del secolo XIX e l'inizio del XX tutto l'edificio teorico costruito fu messo in crisi da una serie di esperimenti che non trovavano spiegazione nell'ambito delle leggi classiche.

Da un lato l'incompatibilità delle stesse equazioni di Maxwell con la relatività galileiana fece crollare l'edificio della meccanica newtoniana, che fino ad allora pareva inattaccabile, e portò alla nascita delle teorie relativistiche (1905-1916) dovute ad Einstein.

Dall'altro lato esperimenti riguardanti sistemi microscopici, in diverse zone dello spettro elettromagnetico, condussero alla formulazione delle ipotesi fondamentali della teoria dei quanti, nell'arco dei primi trent'anni del Novecento.

Inoltre il famoso esperimento di Thomson che dimostrò l'esistenza dell'elettrone come uno dei costituenti fondamentali della materia diede l'impulso all'evolvere della teoria atomica.

Lo studio di queste problematiche fu legato a molti scienziati: tra questi ricordiamo principalmente Bohr, Planck, Compton, Heisenberg, Pauli, Schrödinger e lo stesso Einstein.

I tre esperimenti cruciali che costrinsero i fisici ad una revisione di alcuni concetti della fisica classica e segnarono l'inizio della fisica dei quanti furono:

- l'irraggiamento termico del corpo nero;
- l'effetto fotoelettrico;
- l'effetto Compton.

IRRAGGIAMENTO DEL CORPO NERO.

Già alcuni fisici dell'800, quali Kirchhoff, Helmoltz, Clausius, si erano occupati della descrizione dell'irraggiamento termico, cioè della definizione di relazioni tra l'energia emessa e assorbita dai corpi, la temperatura e la lunghezza d'onda della radiazione.

I primi risultati già evidenziavano una relazione tra il potere emissivo, cioè l'energia emessa dal corpo per unità di tempo e di superficie, la lunghezza d'onda della radiazione e la temperatura assoluta.

Se indichiamo con Φ il flusso di energia incidente su un corpo, questo sarà suddivisibile in tre parti:

Φt = flusso di energia trasmessa, Φa = flusso di energia assorbita, Φr = flusso di energia riflessa.

Per il principio di conservazione dell'energia sarà: $\Phi = \Phi t + \Phi r + \Phi a$. Se definiamo i tre numeri:

$a = \Phi a/\Phi$, fattore di assorbimento, $t = \Phi t/\Phi$, fattore di trasmissione, $r = \Phi r/\Phi$, fattore di riflessione, avremo che $a + t + r = 1$.

Per ogni diversa lunghezza d'onda, ogni corpo possiede diversi valori di a, t ed r.

Si definisce corpo nero un corpo con a = 1 per tutte le lunghezze d'onda a qualsiasi temperatura, cioè un corpo in grado di assorbire tutta la radiazione, quindi di riemetterla.

Il corpo nero è un oggetto ideale; nella realtà un'ottima approssimazione del corpo nero si può ottenere tramite una "cavità radiante", cioè una scatola nera le cui pareti interne siano perfettamente riflettenti. In una delle pareti è praticato un piccolo foro.

Se una radiazione viene catturata dalla cavità, interagisce con la superficie interna di questa, fino a che si crea una situazione di equilibrio termico all'interno in corrispondenza di una certa temperatura.

A questo punto è possibile analizzare la radiazione uscente dal forellino relativa a quella data temperatura: essa riproduce fedelmente la radiazione contenuta all'interno.

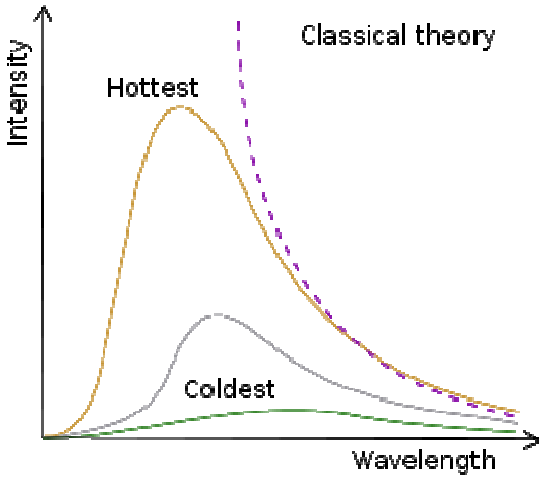
Stefan e Boltzmann riuscirono a stabilire che l'andamento di tale radiazione è legato alla temperatura assoluta dalla semplice legge:

$$P = \sigma \cdot T^4$$

dove P è il potere emissivo (energia per unità di tempo e di superficie), σ è la costante di Stefan-Boltzmann e vale $5{,}67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$, costante universale, T è la temperatura assoluta. Questa legge vale solo per un corpo nero ideale.

Il risultato fondamentale è la dipendenza della radiazione dalla sola temperatura, quindi l'indipendenza da altre caratteristiche quali il materiale o la forma della cavità.

Nel corso di questi studi si erano ricavati grafici sperimentali descriventi l'andamento dell'intensità della radiazione di corpo nero in funzione della lunghezza d'onda o della frequenza. Essi avevano un andamento di questo tipo:



Rλ, la grandezza in ordinata nel grafico, è la radianza spettrale, cioè una grandezza tale che Rλ dλ è uguale al potere emissivo e la radianza totale, cioè l'energia messa su tutte le lunghezze d'onda, è data da:

$$R = \int_0^\infty R_\lambda \, d\lambda$$

Da tali grafici si evinceva che i massimi di intensità al crescere della temperatura corrispondevano a valori decrescenti di λ. Wien dimostrò a questo proposito che il prodotto λmax .T si mantiene costante .

Quella che è nota come legge dello spostamento di Wien è infatti: λmax.T = α, dove $\alpha = 2{,}8978 \cdot 10^{-3} m \cdot K$.

La legge può essere altresì espressa come proporzionalità diretta tra la frequenza di picco e la temperatura.

Da questo momento in poi molti fisici si cimentarono allo scopo di determinare una legge matematica che descrivesse in modo adeguato le curve sperimentali mettendo in relazione energia, lunghezza d'onda e temperatura. Lo stesso Wien scrisse una legge che, però, descriveva in modo soddisfacente le curve sperimentali solo per piccole lunghezze d'onda.

Il più significativo di questi risultati fu quello di Raleigh e Jeans, la cui legge si accordava bene con i dati sperimentali per grandi lunghezze d'onda (cioè basse frequenze) ma si allontanava molto da questi per piccole λ, (cioè alte frequenze). Inoltre tale legge non forniva una spiegazione della posizione dei massimi.

Raleigh e Jeans trattarono la cavità radiante come un contenitore di onde stazionarie, ad esempio nella luce rossa. Quindi considerarono il problema da un punto di vista ondulatorio classico, facendo l'ipotesi che non vi fossero altri modi di vibrazione all'interno della cavità, se non quelli relativi alle frequenze caratteristiche della scatola stessa, in analogia con i modi di vibrazione di una corda tesa con estremi fissi (λ = 2L/n, n = 1,2,3...).

Secondo il principio di equipartizione dell'energia, nato nell'ambito della meccanica statistica, se E è l'energia contenuta nella cavità, ad ogni singola vibrazione spetterà un'uguale frazione dell'energia disponibile. Questo modo di trattare la questione porta ad alcuni paradossi. In realtà, per la legge delle onde stazionarie, vi sono infiniti modi di vibrazione al variare di n, l'energia sarebbe divisa tra infiniti modi e quindi ogni singola vibrazione avrebbe energia infinitamente piccola, cosa che nella realtà non accade. Si può pensare ad un pianoforte con infiniti tasti, come suggerisce il fisico premio Nobel Gamow, in cui se si suona un tasto con debole scambio di energia, l'energia trasmessa si smorza dopo breve tempo; se invece ci fosse fuga di energia attraverso le corde, i modi di vibrazione si propagherebbero a tutti i tasti di destra corrispondenti a suoni sempre più acuti (tutti gli armonici superiori). Suonando su un simile pianoforte si udrebbe una strana musica con suoni acuti e striduli. Analogamente la luce rossa nel cubo di Jeans si trasformerebbe in luce azzurra, violetta, poi in raggi X e raggi γ e così via senza alcun limite: di qui il termine "catastrofe ultravioletta", fatto che non si verifica nella realtà.

Il calcolo dell'energia totale fatto secondo le ipotesi di Raleigh e Jeans porta a un integrale divergente che dà, cioè, l'energia totale come infinita. Ciò è evidentemente assurdo.

Planck poté risolvere questo paradosso solo introducendo ipotesi rivoluzionarie, che egli stesso faticò ad accettare inizialmente, continuando a lungo a considerarle come meri artifici matematici. Trovò una legge perfettamente in accordo con i dati sperimentali, legge che correlava energia, lunghezza d'onda e temperatura, e tale per cui il calcolo dell'energia totale desse un risultato finito.

Planck considerò gli atomi delle pareti interne della cavità come piccoli oscillatori elettromagnetici vibranti ciascuno con una frequenza caratteristica. Essi emettono, come noto dalle leggi di Maxwell, energia elettromagnetica. Le due ipotesi fondamentali introdotte da Planck sono:

- un oscillatore può possedere solo energia multipla intera di una quantità minima finita cioè:
  E = nhf , n = 1,2,3,4… **,** dove h è una costante di proporzionalità;
- gli oscillatori non emettono energia con continuità ma soltanto per "pacchetti ", cioè in quantità finite:
  ΔE = Δnhf = hf

Ognuno di questi pacchetti fu chiamato **quanto di energia** dal termine latino *quantum.*

Quindi l'energia non è distribuita con continuità ma è quantizzata: essa diventa una grandezza <u>discreta</u> così, come era già stato dimostrato in precedenza, per la carica elettrica. L'energia di ogni oscillatore può essere solo un multiplo esatto di una quantità fissata, dipendente dalla frequenza.

Inoltre un oscillatore, finché si trova nello stato di equilibrio, non emette e non assorbe energia: può emettere energia in quanti solo se è in stato eccitato.

Il postulato di Planck "dissuade" l'energia dallo sconfinare nelle regioni delle frequenze alte dello spettro. Infatti rimane possibile solo un numero discreto di valori di energia, pari a 1,2,3 …volte il pacchetto di energia hf corrispondente alla frequenza data. Quanto più alta è la frequenza, tanto minore è il numero di possibili valori di energia sotto un livello fissato; questo fa sì che le vibrazioni ad alta frequenza non possano assorbire ulteriore energia da un certo valore di frequenza in su.

Facendo queste ipotesi Planck ricava per la radianza spettrale l'espressione:

$$R_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

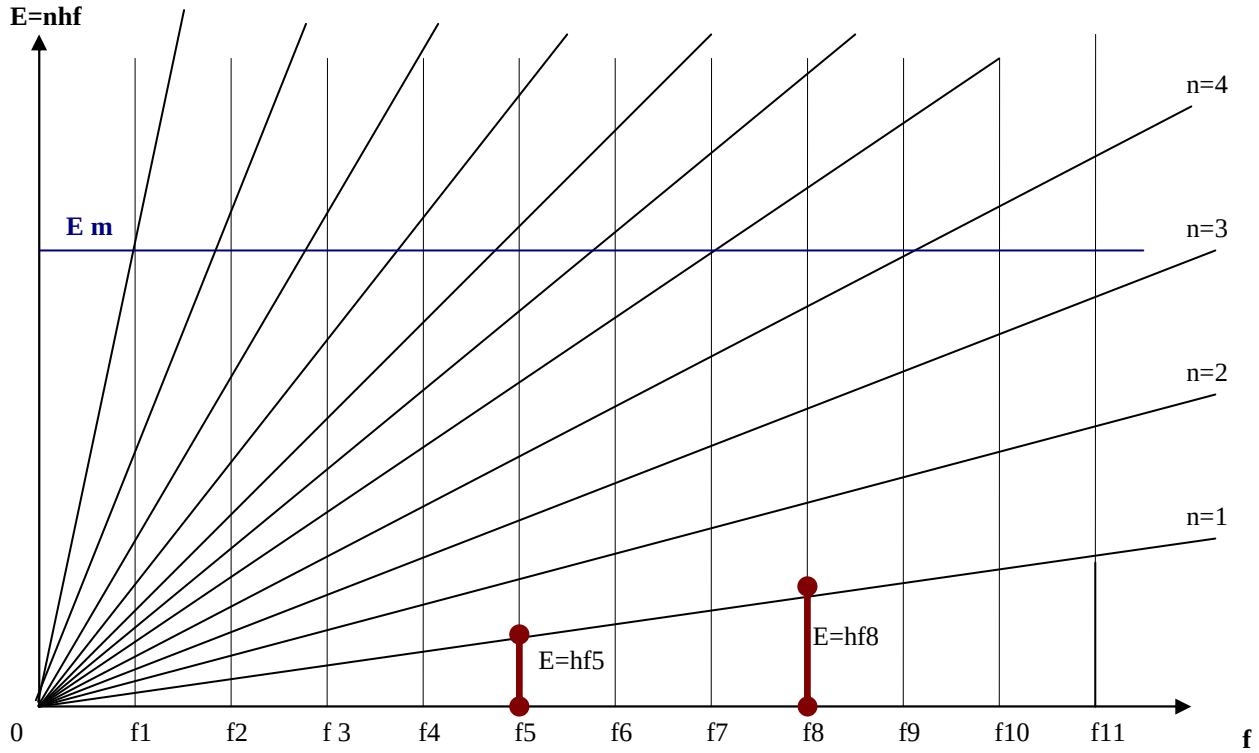
Inizialmente Planck determinò c_1 e c_2 come costanti empiriche, cioè in modo che si adeguassero alle curve sperimentali. In seguito trovò per via teorica le formule :

$$c_1 = 2\pi c^2 h \qquad c_2 = hc/k$$

dove c è la velocità della luce, h verrà chiamata "costante di Planck" e k è la costante di Boltzmann nota dalla teoria cinetica dei gas.

Inserendo per C1 e C2 i dati ricavati sperimentalmente, trovò che $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ e che k era appunto la costante di Boltzmann.

L'equazione di Planck si accordava perfettamente con le curve sperimentali in tutte le lunghezze d'onda ed inoltre la radianza totale calcolata a partire dalla sua equazione dava valore finito (infatti l'integrale divergente di Raleigh e Jeans si trasforma in una serie convergente, variando l'energia in modo discreto).



Gli stati di energia permessi sono rappresentati nel grafico dai punti di intersezione delle rette verticali corrispondenti alle varie frequenze con le rette che rappresentano la relazione E = nhf, per n = 1,2,3…

La retta orizzontale Em corrisponde all'energia media attribuibile ad ogni frequenza, per il teorema di equipartizione dell'energia, essendo l'energia totale finita, anche Em è un valore non superabile.

Si nota che andando verso alte frequenze, il numero di stati di energia possibili diminuisce, poiché il salto quantico hf aumenta, spostandosi verso frequenze molto basse il numero di stati possibili aumenta, ma il salto quantico tende a zero. E' quindi possibile intuire come, sia spostandosi verso alte frequenze sia verso basse frequenze, l'energia totale corrispondente alla singola frequenza tenda a zero, in analogia con l'andamento dei grafici della radianza spettrale. Per ogni frequenza, vi è un numero discreto di "pacchetti" di energia, le frequenze sono infinite, in quanto ogni oscillatore atomico ha una frequenza qualsiasi: l'energia totale si ottiene sommando una quantità infinita, ma discreta, di pacchetti di energia. Si ottiene cioè una "serie" convergente, la cui somma è una quantità finita, come è giusto che sia, essendo l'energia presente nella cavità radiante finita.

Si può calcolare facilmente che per un oscillatore macroscopico, con i valori usuali di frequenza, massa ed energia, il numero n diventa enorme, tanto che la differenza tra n ed n+1 è impercettibile; il salto quantico hυ è invece di dimensioni analoghe alla costante di Planck, cioè è piccolissimo, quindi altrettanto impercettibile. Ciò consente di trattare i fenomeni macroscopici trascurando gli effetti quantistici, senza incorrere in errori.

Il **"principio di corrispondenza"** afferma che i risultati della meccanica quantistica devono ridursi a quelli della meccanica classica nelle situazioni in cui l'interpretazione classica può essere considerata valida. Fu enunciato da Niels Bohr, il fisico danese che applicò la fisica dei quanti alla descrizione dell'atomo, e si rivelò

estremamente importante nella formulazione della teoria quantistica e quindi nella comprensione dei fenomeni che regolano il microcosmo.

Planck, tuttavia, era terribilmente spaventato e preferì credere inizialmente che i pacchetti di energia non fossero conseguenza delle proprietà peculiari delle onde luminose ma piuttosto proprietà intrinseche degli atomi che possono emettere e assorbire radiazione solo in quantità discrete.

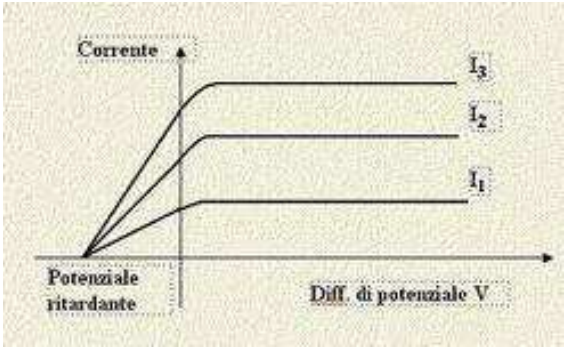
Le ipotesi di Planck, così difficili da accettare perfino da lui stesso, dovevano trovare conferma in altri esperimenti. Fu grazie ad Einstein che le ipotesi di Planck furono confermate e utilizzate nell'interpretazione delle onde luminose.

EFFETTO FOTOELETTRICO

La scoperta dell'effetto fotoelettrico risale al professore russo Stoletov ed è del 1872: consiste nell'inserimento di due piastre metalliche, tra cui è applicata una certa differenza di potenziale, in un tubo a vuoto spinto. Inizialmente non passa corrente elettrica nel vuoto, ma illuminando una delle due piastre con luce di una lunghezza d'onda opportuna (in generale nello spettro ultravioletto), si osserva passaggio di corrente elettrica. I dati sperimentali riguardanti l'andamento dell'emissione elettronica da parte del metallo, raccolti negli anni dai fisici che ripeterono l'esperimento, presentavano alcune caratteristiche non spiegabili mediante la teoria ondulatoria classica.

All'inizio del '900 fu Einstein, allora sconosciuto impiegato dell'ufficio brevetti di Berna, a riconsiderare il problema, ipotizzando che la quantizzazione dell'energia non fosse solo una proprietà degli atomi, come aveva proposto Planck; ma riguardasse davvero le onde elettromagnetiche.

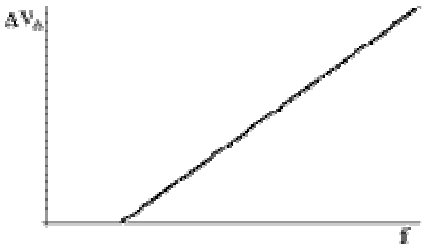
Un fascio di luce monocromatica è inviato sulla piastra metallica. Tale piastra emette elettroni, che vengono accelerati da una d.d.p. e vengono raccolti da una collettore. La corrente elettronica viene misurata tramite un sensibile amperometro. La curva caratteristica è del tipo:



Si osserva che quando V è positivo, anche con un suo incremento, la corrente non aumenta all'infinito ma fino ad un valore di saturazione direttamente proporzionale all'intensità del fascio: la corrente di saturazione è raggiunta quando tutti gli elettroni emessi arrivano al collettore.

Invertendo il segno al potenziale, gli elettroni vengono decelerati: si vede che la corrente diminuisce per arrivare a 0 per un determinato valore V0, detto potenziale di arresto, che è indipendente dall'intensità del fascio incidente.

Per il principio di conservazione dell'energia, V0 deve essere tale che: eV0 = Emax, cioè il lavoro elettrico è uguale all'energia cinetica massima degli elettroni, quindi sufficiente per frenare la loro corsa.



Altro fatto notevole è che il potenziale d'arresto dipende dalla frequenza della luce. Infatti non vengono emessi elettroni finché la frequenza non supera un certo limite detto "frequenza di soglia", che varia da metallo a metallo. Oltre la frequenza di soglia il potenziale di arresto aumenta linearmente con l'aumentare della frequenza:

Vi sono, perciò, tre fatti che vanno contro la teoria ondulatoria:

1) <u>L'energia cinetica</u> dei fotoelettroni, secondo la teoria ondulatoria, <u>dovrebbe aumentare aumentando l'intensità del fascio</u> di luce. Invece l'energia cinetica massima non dipende dall'intensità della luce, infatti il potenziale d'arresto è lo stesso per tutte le intensità.

2) <u>L'effetto fotoelettrico dovrebbe avvenire per qualunque frequenza</u>, purché l'intensità del fascio sia sufficientemente alta. Invece esiste la frequenza di soglia al di sotto della quale non c'è emissione.

3) Secondo la teoria ondulatoria classica, <u>dovrebbe esserci un ritardo temporale</u> evidente tra l'assorbimento di energia da parte dell'elettrone e la sua emissione. Questo perché essendo la superficie di impatto di ogni elettrone estremamente piccola e l'energia assorbita proporzionale alla superficie di impatto, sarebbe necessario un certo tempo affinché l'elettrone assorba energia sufficiente per uscire dal metallo. Invece tale ritardo non era mai stato osservato.

Einstein introduce nuove ipotesi sulla natura della luce, sostenendo che l'energia da questa trasportata non ha andamento continuo, ma è concentrata in quantità finite chiamate in seguito "**fotoni**" da Lewis, nel 1926.

I pacchetti di luce sono del tipo **dE = hf** e solo in questa forma gli elettroni possono assorbire energia. La quantizzazione è quindi proprietà insita nel trasporto di energia da parte delle onde elettromagnetiche e non solo una peculiarità degli atomi nell'atto di emissione o assorbimento, come aveva ipotizzato Planck.

Applicando queste ipotesi e il principio di conservazione dell'energia all'effetto fotoelettrico, Einstein scrive la semplice equazione**: hf = L + Emax**
dove hf è l'energia totale posseduta dal fotone, L il lavoro di estrazione dal metallo; la restante energia è l'energia cinetica massima posseduta dall'elettrone.

Questa equazione risolve in modo semplice le tre contraddizioni precedenti. Infatti:

1) se si raddoppia l'intensità del fascio raddoppia il numero dei fotoni, quindi degli elettroni estratti, cioè la corrente, ma l'energia dei singoli fotoni e quindi il potenziale d'arresto restano invariati;

2) se l'energia cinetica massima è 0, allora hf = L, cioè l'energia minima per estrarre l'elettrone dal metallo deve essere uguale al lavoro di estrazione. Ciò, come si vede dall'equazione, dipende dalla frequenza della luce incidente. Al di sotto della frequenza di soglia, gli elettroni non hanno sufficiente energia per vincere le forze di coesione ed essere emessi;

3) l'assenza di ritardo nell'emissione è dovuta al fatto che l'energia è fornita in quanti e non in modo continuo. Pertanto nel momento in cui l'elettrone assorbe il quanto di energia viene subito emesso.

Da $hf = L + E_{max}$ si ottiene $hf = L + eV_0$ e quindi $V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{L}{e}$

Ciò significa che il potenziale d'arresto varia in modo lineare con la frequenza così come era stato sperimentato. Il coefficiente angolare della retta (*h/e*) è costante ed è determinabile sperimentalmente dal grafico su riportato. Millikan, il quale in quegli anni aveva ricavato il valore della carica dell'elettrone, verificò sperimentalmente anche la teoria di Einstein per l'effetto fotoelettrico. Avendo misurato *e*, gli fu è possibile calcolare il valore di h. Si trovò per h un valore concordante con quello della costante di Planck. Ciò fu una conferma lampante della teoria dei quanti. Einstein vinse per la teoria dei fotoni il Nobel nel 1921.

EFFETTO COMPTON

vedi appendice per una trattazione più dettagliata

Il terzo esperimento cruciale sull'interazione radiazione-materia fu fatto da Compton nel 1923. Consisteva nell'inviare un fascio di raggi X di definita lunghezza d'onda contro un blocchetto di carbone o grafite. Si osservava che la radiazione diffusa presentava due picchi di intensità: uno corrispondente alla lunghezza d'onda incidente, come ci si aspetterebbe dalla teoria ondulatoria classica (gli atomi entrano in risonanza con la radiazione incidente ed emettono onde della stessa lunghezza d'onda come un diapason che venga investito da un suono di frequenza adeguata); vi era, però, un secondo picco in una lunghezza d'onda maggiore.

La distanza tra i due picchi, $\Delta\lambda$, viene detta spostamento Compton ed è funzione dell'angolo di incidenza dei raggi X. Come si spiega la presenza del secondo picco?

Compton aveva utilizzato raggi X e non altre onde elettromagnetiche, come la luce, in quanto più energetici, in virtù della loro maggiore frequenza. In questo modo diventa trascurabile l'energia con cui gli elettroni esterni sono legati agli atomi, per cui essi possono essere considerati come liberi.

Radiazione incidente ed elettroni si comportano nell'esperimento come se si trattasse di un urto meccanico: l'elettrone viene espulso dall'atomo secondo una certa direzione e con una certa velocità e la traiettoria della radiazione incidente viene deviata. Si nota che vi è un picco di radiazione diffusa con una lunghezza d'onda maggiore di quella iniziale, cioè una frequenza minore: ciò fu spiegato da Compton con l'ipotesi che la radiazione incidente avesse caratteristiche "corpuscolari", fosse cioè composta di fotoni. Questi trasportano quantità di moto, oltre che energia. Compton tratta l'interazione fotone-elettrone come se si trattasse di un urto elastico tra palle da biliardo. Nell'urto la radiazione perde parte della sua energia, e pertanto la radiazione che riemerge dopo l'urto possiede una minore frequenza, quindi una lunghezza d'onda maggiore.

L'effetto Compton è particolarmente evidente per lunghezze d'onda piccole, ma è trascurabile per grandi λ.

I tre esperimenti considerati, comunque, - irraggiamento termico, effetto fotoelettrico, effetto Compton -, si estendono, nel loro complesso a gran parte dello spettro elettromagnetico e sono pertanto una conferma dell'applicabilità della teoria dei quanti alla radiazione elettromagnetica.

MECCANICA ONDULATORIA

Negli anni '20 del '900 era ormai fuori discussione l'aspetto corpuscolare delle onde elettromagnetiche, appurato con gli esperimenti sull'irraggiamento termico, sull'effetto fotoelettrico e sull'effetto Compton. D'altro canto la teoria di Maxwell del campo elettromagnetico continuava ad essere valida ed estremamente coerente nel descrivere l'aspetto ondulatorio della luce. Questo comportamento bivalente della luce dovette essere accettato in quanto le onde elettromagnetiche evidenziavano caratteristiche di onda e particella a seconda dell'esperimento svolto.

Il fisico francese Louis duca di De Broglie azzardò l'ipotesi che, se l'energia aveva questa ambivalenza nel comportamento, anche la materia poteva presentare la stessa dualità.

De Broglie considerò che, se un elettrone possedeva caratteristiche ondulatorie, tale doveva essere il suo comportamento anche lungo la sua orbita. In questo caso l'onda generata dall'elettrone doveva essere di tipo stazionario in analogia con le onde su una corda tesa ad estremi fissi. Essendo l'orbita chiusa, deve valere la seguente relazione tra raggio orbitale e lunghezza d'onda:

$$2\pi r = n\lambda \qquad (1)$$

Se così non fosse, l'onda non si manterrebbe ma si annullerebbe per interferenza distruttiva. Partendo dai risultati di Bohr sulla struttura dell'atomo, si sa che il momento angolare è quantizzato:

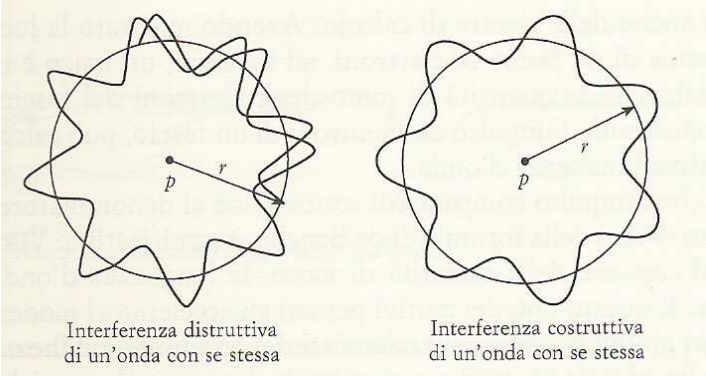
$$l = mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

e si può ricavare l'uguaglianza:

$$2\pi r = \frac{h\,n}{m\,v}$$

Questa equazione confrontata con la (1) fornisce:

$$\lambda = \frac{h}{m\,v}$$



che descrive la lunghezza d'onda attribuibile a una particella di massa m e velocità v.

Considerando che fenomeni ondulatori, quali la diffrazione, avvengono solo se le dimensioni di un ostacolo sono paragonabili a quelle della lunghezza d'onda incidente, valutando all'incirca quanto dovesse essere la λ dell'elettrone, si tentò di sperimentare quanto ipotizzato usando come reticolo di diffrazione un cristallo.

La verifica diretta dell'aspetto ondulatorio delle particelle fu ottenuta da Davisson e Germer e, indipendentemente, da G.P.Thomson nel 1927. (Si noti che il padre J.J. Thomson aveva evidenziato, col suo famoso esperimento, la natura corpuscolare della particella elettrone).

Se si considera una particella di massa $10^{-5}\,g$ e di velocità pari a qualche cm/s ad essa sarà associata una lunghezza d'onda di circa $10^{-22}\,m$, assolutamente non osservabile.

Per un elettrone, che si muova a una velocità elevata, dell'ordine di $10^{7}\,m/s$, la lunghezza d'onda è di circa 1 Angstrom, misura confrontabile con la lunghezza d'onda dei raggi X.

Davisson e Germer verificarono la correttezza dell'ipotesi di De Broglie con un esperimento di diffrazione degli elettroni. I risultati sperimentali furono simili a quelli ottenuti con i raggi X e l'esame delle figure di diffrazione confermarono la relazione di De Broglie.

Sembrava allora appurato che anche le particelle materiali possedessero in alcuni esperimenti proprietà di tipo ondulatorio senza per questo entrare in contraddizione con le leggi della quantizzazione dell'energia.

Che significato attribuire a questo comportamento di tipo ondulatorio?

EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER E PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE.

Ad ogni onda nota in fisica è associata una funzione $\Psi(\mathbf{r}, t)$ che descrive il campo fisico variabile nell'onda stessa, per esempio: l'ampiezza y nelle onde di una corda vibrante, la pressione nelle onde sonore, il campo elettrico nelle onde elettromagnetiche.

Per quanto riguardava le onde materiali, si introdusse la funzione d'onda Ψ la quale non era però connessa a nessun ente fisico, ma possedeva caratteristiche tali da renderla atta alla descrizione dei fenomeni trattati. Questa funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$ è soluzione di un'equazione differenziale del second'ordine introdotta da Schrödinger nel 1926. Schrödinger partì dall'osservazione di Hamilton che le leggi della meccanica classica possono essere messe in relazione con le leggi dell'ottica geometrica: le leggi dell'ottica ondulatoria si riducono a quelle dell'ottica geometrica quando la lunghezza d'onda tende a zero.

Cercò quindi di interpretare le leggi della meccanica classica come limiti di leggi più generali di una meccanica ondulatoria che potesse spiegare le apparenti assurdità sperimentali.

L' equazione di Schrödinger, in una forma semplificata rispetto alla sola dimensione x, è:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\psi(x,t) = 0$$

da cui si ottiene la soluzione : $\psi(x,t) = e^{\frac{2\pi i}{h}(px - Et)}$.

Una forma dell'equazione completa, riguardante una variabile spaziale e una temporale, è:

$$\Delta_2 \Psi(x,t) - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U(x)\Psi(x,t) + \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = 0$$

Questa equazione fu ottenuta da Schrödinger partendo da un'equazione del tipo di quelle delle onde elettromagnetiche, introducendovi l'ipotesi di De Broglie: $p\lambda = h$.

La funzione soluzione di questa equazione, per poter interpretare le onde materiali, doveva soddisfare alcuni requisiti:

- doveva valere il principio di sovrapposizione delle onde di Fourier;
- la soluzione doveva descrivere completamente lo stato dinamico del sistema in un istante qualsiasi conoscendo il valore all'istante t_0;
- la soluzione doveva rispettare le ipotesi di De Broglie;
- i risultati dovevano essere in accordo con le leggi della meccanica classica, ottenibili facendo tendere λ a zero.

Infatti, per un oggetto in movimento osservabile a occhio nudo, la lunghezza d'onda è talmente piccola che non è pensabile poterla misurare. Per esempio, se per un elettrone di massa $0{,}9 \cdot 10^{-30}$ kg che si muove con velocità $10^6 m/s$, la lunghezza d'onda è $7 \cdot 10^{-10} m$, invece per una massa di 1 kg che si muove a velocità di $10^3 m/s$, la lunghezza d'onda è di $6{,}6 \cdot 10^{-37} m$!

La funzione Ψ è una funzione a valori complessi; calcolandone il modulo al quadrato, si ha che $|\Psi|^2$ è quantità reale e funzione solamente dello spazio.

Essa assume un significato fisico, secondo l'interpretazione di Born, che è la probabilità per unità di volume di trovare la particella; per la funzione così trovata vale la proprietà di normalizzazione tipica di ogni funzione di probabilità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 \Delta V = 1$$

. Ciò garantisce l'esistenza della particella in qualche luogo nello spazio.

Il prodotto $|\Psi|^2 \Delta x$ rappresenta la probabilità che la particella si trovi nell'intervallo spaziale Δx.

La proprietà di normalizzazione vale indipendentemente dal tempo e per qualsiasi ψ soluzione dell'equazione di Schrödinger.

Questa interpretazione della funzione d'onda fu data per primo dal premio Nobel Max Born. Egli dimostrò che anche le onde di De Broglie in realtà non sono altro che onde di probabilità; non possono essere interpretate come onde fisiche classiche ma solo come l'andamento della probabilità di trovare la particella in una zona dello spazio.

E' nettamente in contrasto con i concetti della fisica classica il fatto che non si possa stabilire dove è la particella con precisione, ma solo dove è probabile trovarla.

La probabilità era già entrata nella fisica solo nella meccanica statistica, dove ciò si era reso necessario trattandosi di gas, cioè di sistemi costituiti da grandi numeri di particelle ed essendo pertanto misurabili soltanto valori medi statistici. In questo caso <u>il risultato probabilistico è indipendente dal numero delle particelle, ma rappresenta un limite teorico, non solo sperimentale, nella possibilità di individuare con esattezza una grandezza fisica.</u>

In quegli anni (1927) Heisenberg formulò il noto principio che tolse definitivamente l'illusione classica di dominare le leggi della natura in senso deterministico.

L'enunciato del principio di indeterminazione è: "<u>Non si possono misurare simultaneamente, con precisione arbitrariamente grande, la quantità di moto e la posizione di una particella, nel senso che l'aumento di precisione in una delle due misure comporta un peggioramento dell'errore nell'altra misura</u>".

Il principio si generalizza anche ad altre coppie di grandezze fisiche dette coniugate, come ad esempio energia e tempo. Una formulazione matematica del principio, proiettando la relazione nelle tre direzioni spaziali, è:

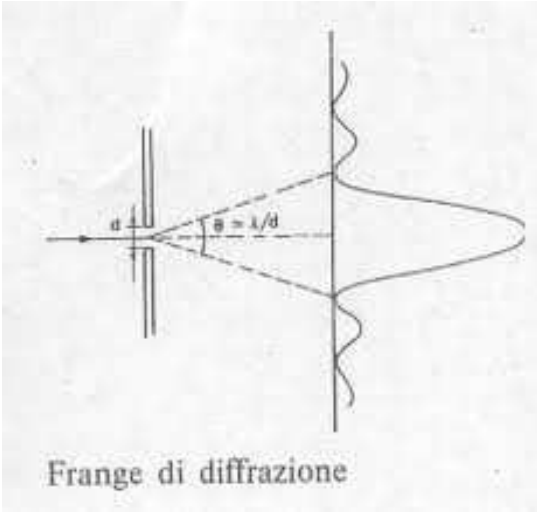
$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar/2$$
$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \hbar/2$$
$$\Delta p_z \cdot \Delta z \geq \hbar/2$$

Il prodotto dei due errori non può mai essere inferiore a una costante.

Consideriamo un esperimento ideale per capire meglio il significato del principio.

Un fascio di elettroni viene diffratto da una fenditura di ampiezza d = Δy e forma una figura di diffrazione su uno schermo.

Lo scopo è misurare posizione e velocità dell'elettrone nella direzione y. L'elettrone passa attraverso la fenditura; la sua posizione, ovviamente, è nota con un margine di errore pari a: d = Δy. Si può migliorare la valutazione della posizione restringendo la fenditura. In tal modo, però, si allarga la figura di diffrazione ottenuta sullo schermo. Considerando l'elettrone che cade nel primo minimo di diffrazione questo avrà velocità v; la componente della velocità nella direzione y sarà *Vy*. Assumiamo, come errore sulla misura di *Vy*, la quantità Δ*Vy*. Per le leggi della diffrazione da una fenditura si ha che per il primo minimo vale la relazione:



$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

Inoltre la componente della velocità nella direzione y è: $Vy = V\, sen\theta$; assumiamo come errore: $\Delta Vy = V\, sen\theta$. Si ottiene allora $sen\ \theta = \Delta Vy/V$. Dal confronto con la formula precedente si ha:

$$\frac{\Delta v_y}{v} \approx \frac{\lambda}{\Delta y}$$

e quindi $\Delta v_y \cdot \Delta y \approx \lambda v$,

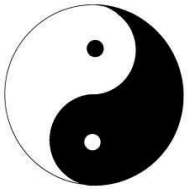
allora essendo $\lambda = \frac{h}{mv}$ si ottiene $\Delta v_y \cdot \Delta y \approx \frac{hv}{mv}$

e infine: $\Delta p_y \cdot \Delta y \approx h$.

Riducendo **Δy** si estende la figura di diffrazione quindi aumenta l'errore su $\mathbf{p_y}$. Quindi più affiniamo la precisione nella misura delle grandezze corpuscolari, maggiore sarà l'errore nella determinazione delle grandezze caratterizzanti l'aspetto ondulatorio e viceversa.

Con considerazioni simili si può dimostrare che la stessa relazione vale per energia e tempo: $\Delta E \cdot \Delta t \approx h$, dove ΔE rappresenta il minimo di indeterminazione su E e Δt il tempo che abbiamo a disposizione per misurare E.

Bohr sintetizzò il dualismo di comportamento nella totalità dei fenomeni fisici con il **"principio di complementarità",** una sorta di principio "meta-fisico" che esprime un'affermazione non interna alla teoria fisica, ma <u>sulla</u> teoria fisica: <u>le due nature, ondulatoria e corpuscolare, sia della materia sia della radiazione, sono complementari l'una dell'altra. Non è possibile né per la materia né per la radiazione dimostrare l'unicità delle proprietà ondulatorie e corpuscolari</u>.



Il principio di indeterminazione sconvolse la concezione classica della fisica e, per questo, la sua interpretazione dette luogo a non pochi errori e fraintendimenti.

Inoltre ebbe ripercussione anche al di fuori della fisica stessa, modificando necessariamente anche la concezione filosofica della scienza e suscitando a volte applicazioni discutibili in altri ambiti.

Infatti, essendo il principio indipendente dal grado di precisione e di raffinatezza dello strumento utilizzato per la misura, il suo significato profondo è di portata generale, cioè sottrae all'uomo la possibilità di poter osservare i fenomeni naturali con precisione sempre crescente in virtù "solamente" del miglioramento delle tecnologie. Non è dato di indagare nella natura microscopica oltre certi limiti teoricamente predetti, limiti intrinseci e non contingenti. Della natura non si può avere informazione completa, ma soltanto massima, il massimo essendo raggiunto solo nei limiti del principio. Come scrisse Heisenberg: "non possiamo conoscere il presente in tutti i suoi dettagli".

<u>Una delle conseguenze cruciali del principio è che, nel trattare sistemi fisici, non è possibile prescindere dal ruolo dell'osservatore</u>. Nella fisica classica l'osservatore era esterno totalmente al sistema osservato e pertanto non lo influenzava, o meglio lo influenzava in maniera trascurabile. Nella microfisica ciò non è più possibile: non appena si osserva un sistema, lo si perturba in un modo non esattamente noto e pertanto l'osservatore diventa inesorabilmente uno dei protagonisti. Mentre il moto di una pallina da tennis in movimento non è perturbato in modo significativo dalle onde luminose che permettono l'osservazione, essendo la quantità di moto dei fotoni trascurabile rispetto a quella della pallina, per quanto concerne una particella quale un elettrone, è comprensibile che i fotoni possano modificare in misura notevole lo stato dell'elettrone osservato.

Le quantità Δp e Δx moltiplicate nella relazione di Heisenberg riguardano misure che possono essere prese come condizioni iniziali, nella consapevolezza che la determinazione esatta dell'una toglie senso alla

determinazione dell'altra. Nulla di certo si può predire riguardo all'evoluzione del sistema fisico nel futuro, a differenza che nella fisica classica, dove, nella meccanica deterministica di Laplaciana memoria, il sistema, date le condizioni iniziali, aveva una sola possibilità di evoluzione. Si può soltanto valutare, tramite l'equazione di Schrödinger, la probabilità che il sistema evolva in un modo piuttosto che in un altro.

N:B: In realtà l'equazione di Schrödinger è assolutamente deterministica, nel senso che, noto lo stato del sistema all'istante t (cioè l'insieme dei valori numerici delle grandezze che possono essere misurate simultaneamente), essa permette di calcolare lo stato del sistema in un istante futuro, cioè la funzione d'onda relativa a quell'istante, ma la funzione Ψ ottenibile dall'equazione di Schrödinger descrive una distribuzione probabilistica. Se una grandezza, caratterizzante lo stato del sistema, è nota all'istante t_0 in modo determinato, l'equazione mi consente di determinarne la misura all'istante futuro t_1, se una grandezza non è nota in modo determinato, l'equazione di Schrödinger mi consente di determinare la probabilità di ogni valore possibile per la sua misura all'istante futuro t_1.

Lo stesso Heisenberg scrisse vari testi sul significato filosofico sotteso alla nuova fisica; l'idea di "oggetto fisico" è modificata, il fisico suggerisce di parlare di "onde di materia" piuttosto che di particelle; i termini "posizione, velocità, quantità di moto, traiettoria" diventano inadatti alla rappresentazione della nuova teoria. Il linguaggio è inadeguato mentre il formalismo matematico sembra esprimere tutto ciò che si può dire, in modo più pregnante delle parole. Le grandezze definite in senso operativo dalla fisica classica, definite proprio a partire dalla possibilità della loro misurazione, ora perdono il loro significato classico in virtù dell'operazione stessa di misura. L'operazione di misura altera il sistema, l'incontro fotone-elettrone può avvenire in molti modi e ciò che misuro "dopo" non era esattamente prevedibile "prima" ed è stato influenzato dal mio intervento di misurazione.

Riportiamo un esempio di Heisenberg. Se cerco di osservare un elettrone lungo la sua orbita, utilizzo fotoni di lunghezza d'onda molto piccola, necessariamente più piccola della dimensione dell'atomo, limitando l'errore di posizione alla lunghezza d'onda, posso così definire posizione e quantità di moto iniziali nei limiti del principio di indeterminazione; un fotone possiede una quantità di moto molto più grande di quella dell'elettrone, un solo quantum sposterà quindi l'elettrone dalla sua orbita allontanandolo dall'atomo. Vi sarà quindi, in una seconda fase, un pacchetto d'onde che non gira intorno al nucleo ma si allontana dall'atomo, non si può parlare né di orbita né di traiettoria, né si possono fare affermazioni su posizione e velocità dell'elettrone in questa fase compresa tra la prima e la seconda osservazione. In seguito, una seconda misurazione consentirà di stabilire in che modo, tra i tanti possibili, l'elettrone si è allontanato dall'atomo.

La conoscenza della funzione d'onda non permette in generale di stabilire con precisione i risultati delle singole operazioni di misura. Un sistema, nella fase della sua evoluzione, si comporta in modo deterministico, nel senso che l'equazione di Schrödinger ci permette di seguire l'andamento della funzione d'onda fintanto che il sistema è isolato; il sistema "collassa" in maniera del tutto casuale e non prevedibile verso uno degli stati permessi dalla funzione di probabilità, nel momento in cui si interviene sul sistema per eseguire delle operazione di misura, cioè per passare dalla funzione d'onda a dei numeri.

Scrive Heisenberg: <<*Perciò, l'interpretazione teoretica di un esperimento richiede tre stadi distinti: (1) traduzione della situazione sperimentale in una funzione di probabilità; (2) accompagnamento di questa funzione lungo il corso del tempo; (3) determinazione di una nuova misurazione del sistema il cui risultato può poi essere calcolato dalla funzione di probabilità. Per il primo punto è condizione necessaria la determinazione delle relazioni di incertezza. Il secondo punto non può venir descritto in termini di concetti classici; non vi è alcuna descrizione possibile di ciò che accade al sistema tra l'osservazione iniziale e la nuova misurazione. E' soltanto nella terza fase che passiamo di nuovo dal "possibile" al "reale"*>>.

A questo proposito è spesso citato il paradosso del "gatto di Schrödinger".

Il paradosso fu in realtà proposto da Einstein, e riguardava una bomba. Einstein lottò per anni, inventando esperimenti ideali mirati a confutare la teoria quantistica, di cui non accettava l'aspetto di casualità e imprevedibilità, essendo profondamente legato al "principio di causalità" che regna anche nella teoria della relatività. Famose le frasi "Dio non gioca a dadi" e "Preferirei fare il ciabattino, o forse il biscazziere, invece del fisico..." (se la fisica andasse in questa direzione, n.d.R.). Schrödinger, nella diatriba intorno agli aspetti apparentemente assurdi della meccanica quantistica, stava abbastanza sulla sponda conservatrice, a differenza di Bohr e Heisenberg, e rese l'idea ancora più "paradossale" applicando l'esempio a un gatto.

« *Si possono anche costruire casi del tutto burleschi. Si rinchiuda un gatto in una scatola d'acciaio insieme alla seguente macchina infernale (che occorre proteggere dalla possibilità d'essere afferrata direttamente dal gatto): in un contatore Geiger si trova una minuscola porzione di sostanza radioattiva, così poca che nel corso di un'ora forse uno dei suoi atomi si disintegrerà, ma anche, in modo parimenti probabile, nessuno; se l'evento si verifica il contatore lo segnala e aziona un relais di un martelletto che rompe una fiala con del cianuro. Dopo avere lasciato indisturbato questo*

intero sistema per un'ora, si direbbe che il gatto è ancora vivo se nel frattempo nessun atomo si fosse disintegrato, mentre la prima disintegrazione atomica lo avrebbe avvelenato. La funzione Ψ dell'intero sistema porta ad affermare che in essa il gatto vivo e il gatto morto non sono degli stati puri, ma miscelati con uguale peso. » (Erwin Schrödinger)

E' noto che, valendo il principio di sovrapposizione per le funzioni d'onda, se un sistema ammette lo stato Ψ_1 e lo stato Ψ_2, tra loro incompatibili, ammette anche una qualunque combinazione lineare dei due, cioè $\Psi = a\,\Psi_1 + b\,\Psi_2$, dove a e b sono le ampiezze di probabilità relative ai due stati. Nel caso del gatto, finché il gatto è chiuso nella stanza, la sua funzione d'onda comprende la possibilità "gatto vivo + gatto morto". Nel momento in cui si apre la porta per osservare il gatto, il sistema gatto collassa comunque verso uno dei due stati, vivo o morto.

L'esempio di Schrödinger appare oggi un po' superficiale in quanto non è molto sensato parlare dello stato quantico di un gatto; l'interazione continua e molto complessa degli innumerevoli atomi che compongono il gatto non permette di fissare, se non per un istante fugace, uno stato complessivo corrispondente esattamente a "vivo + morto". Le proprietà del gatto osservabili sono quelle che rimangono pressoché costanti, cioè i suoi attributi classici, compreso il fatto che o è vivo o è morto.

Bohr era più vicino di altri all'idea che il gatto non potesse avere un comportamento quantistico…

L'equazione di Schrödinger presenta difficoltà di soluzione in generale, ma vi sono particolari situazioni fisiche che ne facilitano l'interpretazione. Si tratta degli stati stazionari nei quali la funzione d'onda oscilla intorno ad un andamento medio senza variare nel tempo.

I problemi stazionari nel mondo microscopico riguardano atomi, molecole, cristalli, tutti oggetti dotati di struttura piuttosto stabile nel tempo. L'applicazione dell'equazione di Schrödinger a questi sistemi ebbe successo e fornì una dimostrazione alle ipotesi della quantizzazione dell'energia di Planck e di Bohr.

L'equazione di Schrödinger riassume in sé le ipotesi fondamentali della meccanica quantistica e della meccanica ondulatoria: essa è la base per la spiegazione di tutta la complessa fenomenologia riguardante l'atomo, la molecola e certe proprietà macroscopiche della materia non interpretabili con la meccanica classica.

L'equazione di Schrödinger fu ulteriormente generalizzata dal fisico inglese Paul Dirac, il quale ne scrisse una formulazione che rendeva perfettamente conto di tutti i dati dell'esperienza.

Infatti la prima equazione di Schrödinger non era invariante per le trasformazioni di Lorentz, cioè non era in accordo con la teoria della relatività; inoltre non se ne deduceva per via teorica l'esistenza dello spin. L'equazione di Dirac prevede invece queste due proprietà; da essa inoltre scaturì una nuova sorprendente indicazione, cioè l'esistenza dell'antimateria.

Infatti Dirac dimostrò che le soluzioni della sua equazione si dividono in due categorie: soluzioni con energia positiva (somma dell'energia a riposo e dell'energia cinetica) corrispondenti agli elettroni noti; soluzioni a energia negativa che da un punto di vista classico potrebbero essere scartate.

Nella meccanica quantistica sono possibili salti quantici con energia maggiore o minore di zero, e questo condusse a ipotizzare l'esistenza di elettroni con carica positiva, detti positroni. Questi furono sperimentalmente osservati nel 1932 da Anderson.

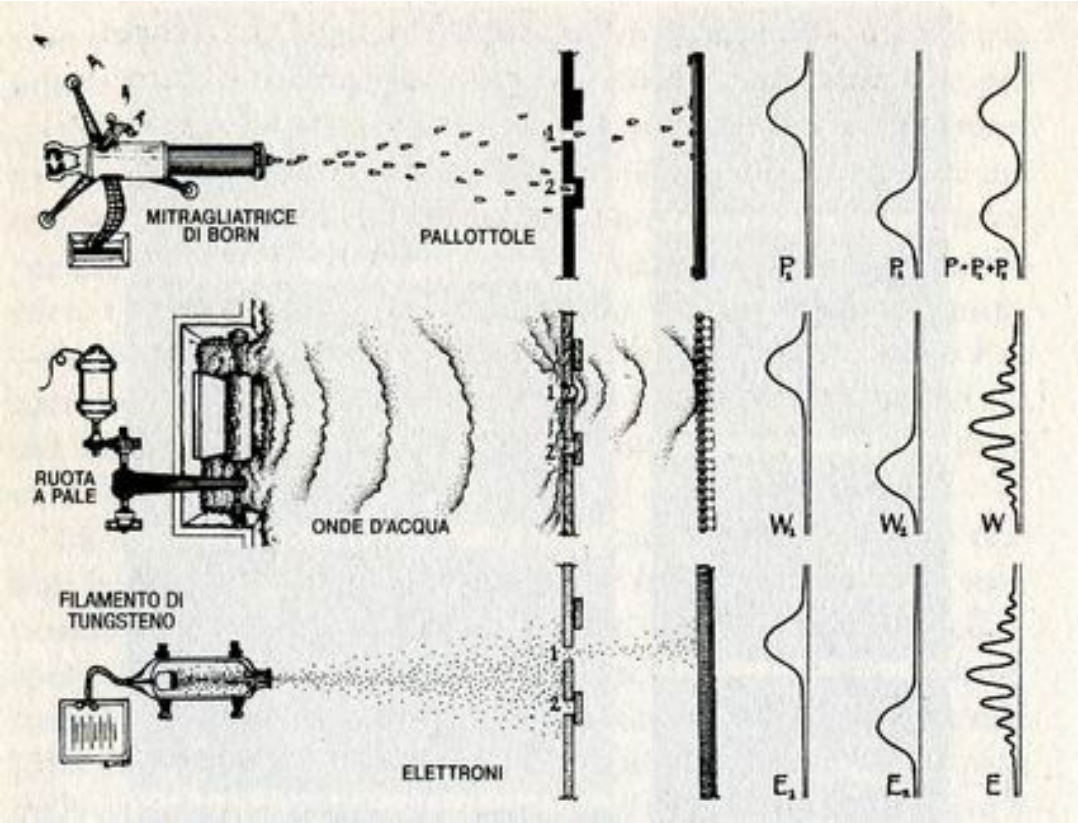
Divenne sempre più chiaro, poi, che quello dell'elettrone non era un caso isolato, ma per ogni particella esiste una antiparticella.

Bibliografia

G.Gamow, Trent'anni che sconvolsero la fisica, Zanichelli,1966
D.Hallyday, R. Resnick, Fondamenti di Fisica 3, Zanichelli, 1990
W.Heisenberg, Fisica e Filosofia, Il Saggiatore, 2011
W.Heisenberg, Indeterminazione e realtà, Guida, 2002
W.Hesenberg, Lo sfondo filosofico della fisica moderna, Sellerio, 1999
D.Lindley, Incertezza, Le Scienze, 2012
G.Longhi, Appunti di Fisika Quantistika

ESPERIMENTO DELLA DOPPIA FENDITURA

Si vuole analizzare il comportamento di elettroni in un esperimento con doppia fenditura simile all'esperimento di Young che verificò l'interferenza della luce. L'autore del testo segue la descrizione dell'esperimento data dal fisico Richard Feynman nelle sue famose Lectures.



Innanzitutto, scrisse Feynman, immaginiamo un esperimento in cui una mitragliatrice spara a caso delle pallottole disseminandole su una parete corazzata nella quale sono praticati due piccoli fori. Ogni foro ha un otturatore che può essere usato per chiuderlo completamente. Ogni foro è grande esattamente quanto basta per permettere a una pallottola di passare attraverso di esso e colpire una superficie d'arresto. Quasi tutte le pallottole colpiscono la parete d'arresto negli stessi due luoghi; un piccolo numero rimbalza sull'orlo dei fori venendone deviate a un certo angolo, cosicché non possiamo mai predire esattamente dove ognuna di queste pallottole andrà a colpire. Nel quadro di quest'esperimento, dice Feynman, immaginiamo che un «rivelatore di pallottole» situato sulla superficie d'arresto possa essere mosso in giro per contare il numero di pallottole che colpiscono ogni particolare punto. Lo scopo dell'esperimento è quello di misurare la probabilità che le pallottole colpiscano ogni particolare punto della superficie d'arresto. Quando effettivamente spariamo e cominciamo a misurare, troviamo innanzitutto che il rivelatore riceve sempre, ovviamente, pallottole complete: noi troviamo sempre nel rivelatore una pallottola completa, mai mezza pallottola o una frazione di pallottola.

Il modello della distribuzione delle pallottole è quindi « discreto », ossia le pallottole arrivano esclusivamente in unità singole, e ogni specifica misurazione registra un numero specifico dì pallottole intere. Soprattutto, constatiamo anche che la probabilità di trovare una pallottola in ogni particolare posizione quando i fori 1 e 2 sono entrambi aperti è uguale alla somma delle probabilità di ciò che accade quando i fori 1 e 2 sono aperti separatamente. In altri termini, la probabilità che una pallottola passi per il foro 1 non risente del fatto che il foro 2 sia aperto o chiuso.

Per presentare la cosa in termini lievemente diversi, se ti trovi in un poligono di tiro e stai colpendo il bersaglio per una certa percentuale del tempo, tale percentuale non cambia anche se qualcuno colloca un secondo bersaglio vicino al tuo e comincia a sbagliare qualche colpo, centrando anche il tuo bersaglio. Feynman parla in proposito di una condizione di « non interferenza ».

Ora, dice Feynman, immaginiamo un secondo esperimento, il quale implichi, invece che pallottole e una mitragliatrice, un serbatoio d'acqua e una macchina per la produzione di onde. Anche questo esperimento ha una parete con due fori, una superficie d'arresto o « spiaggia » che non riflette le onde che la colpiscono, e un rivelatore mobile che misura l'intensità del moto ondoso (in realtà misura l'altezza o ampiezza delle onde e ne eleva al quadrato tale numero per ottenerne l'intensità). Questo è essenzialmente l'esperimento delle due fenditure di Young applicato alle onde dell'acqua.

L'obiettivo dell'esperimento è quello di misurare il moto ondoso quando i fori 1 e 2 sono aperti separatamente e congiuntamente. Quando mettiamo in azione il meccanismo che produce il moto ondoso, dice Feynman, rileviamo varie differenze chiave nei confronti dell'esperimento precedente. Innanzitutto le onde possono avere qualunque grandezza — non sono discontinue, come le pallottole - e la loro altezza può variare in modo regolare e continuo. Inoltre la figura prodotta dalla variazione d'intensità che si riscontra quando entrambi i fori sono aperti non è uguale alla somma delle figure che si formano quando ognuno dei due fori è aperto singolarmente. La ragione, come sappiamo dall'esperimento di Young, è che le onde provenienti dalle due sorgenti sono in fase in certi luoghi e fuori fase in altri. Qui abbiamo una condizione di « interferenza ».

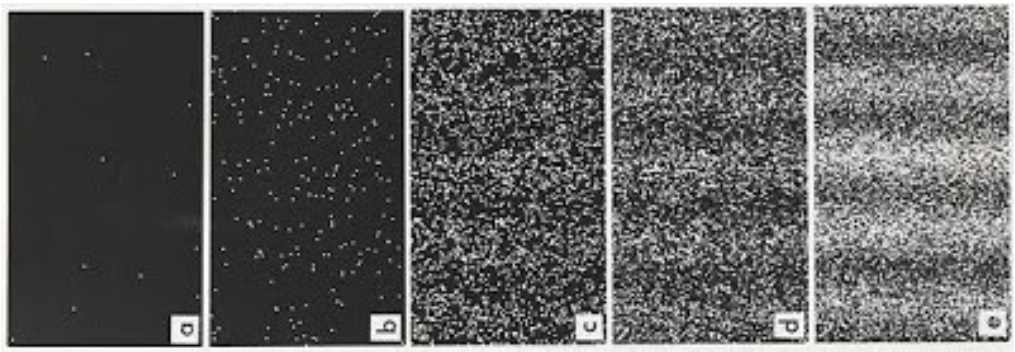
Infine, il terzo esperimento immaginato da Feynman usò un cannone elettronico che sparava un fascio di elettroni contro una parete con due fori. Anche in questo caso, dall'altro lato della parete c'era una superficie d'arresto con un rivelatore elettronico. Noi qui ci stiamo occupando del comportamento quantistico, dice Feynman, e accade qualcosa di molto peculiare. Come nel primo esperimento, scopriamo un modello di distribuzione « discontinuo », poiché gli elettroni sembrano arrivare al rivelatore singolarmente e in modo completo: o il rivelatore emette un « clic » — un evento meccanico che registra l'arrivo di un elettrone - o rimane muto. Come nel secondo esperimento, però, il modello della distribuzione degli elettroni quando entrambi i fori sono aperti non è uguale alla somma dei due modelli di distribuzione che si hanno quando ognuno dei due fori è aperto separatamente. Il risultato è una classica figura d'interferenza. Sorprendentemente, gli elettroni, mentre passano per entrambe le fenditure, agiscono come onde, mentre quando attivano i rivelatori agiscono come particelle.

Si potrebbe immaginare che, dato che molti elettroni passano contemporaneamente attraverso le due fenditure, la figura d'interferenza derivi in qualche modo dal fatto che molti elettroni entrano in collisione fra loro. Una variazione dell'esperimento, implicante l'emissione di un solo elettrone per volta, mostra però che non è così. E qui che ci troviamo di fronte all'« unico mistero ».

Passiamo dunque ora al cannone elettronico e facciamo in modo che spari un solo elettrone per volta, a un ritmo abbastanza basso perché in ogni tempo attraverso la fenditura non passi mai più di un elettrone. Ora è impossibile che si verifichino collisioni fra elettroni. Quando mettiamo in azione il cannone elettronico, gli elettroni cominciano lentamente ad accumularsi dall'altro lato. Dapprima gli elettroni sembrano distribuirsi sulla superficie d'arresto in modo casuale. Al crescere dei dati, però, abbiamo la sorpresa di vedere formarsi una figura: in effetti è una figura d'interferenza! A quanto pare, ogni elettrone passa contemporaneamente attraverso le due fenditure, come un'onda, ma colpisce il rivelatore in un singolo punto, come una particella.

Ogni elettrone interferisce solo con se stesso. Ma come può essere? E così, e questo è « l'unico mistero », disse Feynman. « Io non sto evitando nulla; sto scoprendo la natura nella sua forma più elegante e diffìcile.

(Tratto da "Il prisma e il pendolo" - Robert P. Crease - 2007 Longanesi)



Nei casi in cui c'è interferenza si trova che la distribuzione di probabilità non è la somma delle due distribuzioni generate dal foro 1 e dal foro 2; ciò che si somma sono le funzioni d'onda o ampiezze di probabilità, non le probabilità:

$$\Psi_{1+2} = \Psi_1 + \Psi_2$$

La probabilità di trovare gli elettroni in un certo punto dello schermo è data dal modulo al quadrato della funzione d'onda:

$$P_{1+2} = \left|\Psi_1 + \Psi_2\right|^2 \neq \left|\Psi_1\right|^2 + \left|\Psi_2\right|^2$$

ORA OSSERVIAMO GLI ELETTRONI

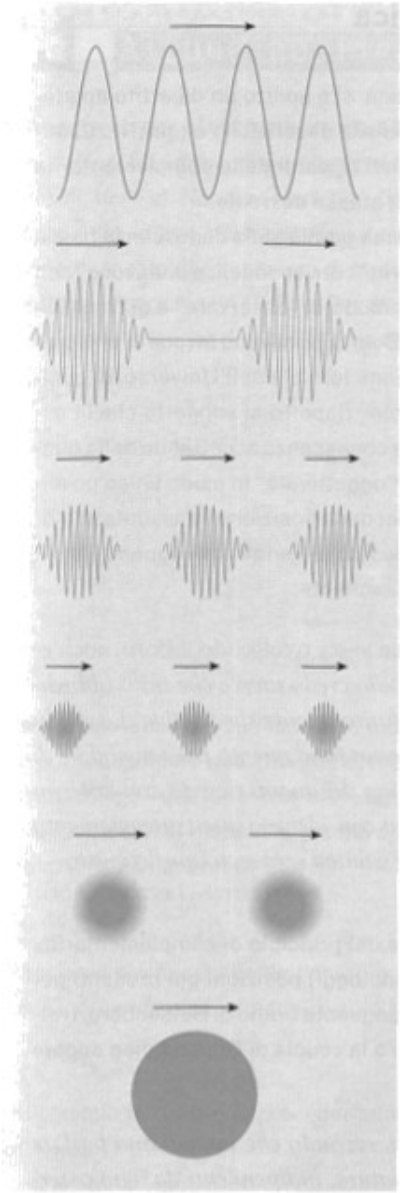
Supponiamo di inserire una sorgente di luce tra i due fori. Quando un elettrone passa attraverso un foro e assorbe la luce inviata dalla nostra sorgente devierà la luce verso il nostro occhio. In poche parole, lo vediamo. E possiamo sapere da quale foro è passato. Possiamo registrare quanti elettroni passano dal foro 1 e quanti dal foro 2. Le distribuzioni di probabilità che otteniamo sono le solite P1 e P2 in figura. La probabilità totale a questo punto si otterrà facendo la somma delle due probabilità, cioè dei due conteggi (foro 1 e foro 2). **Non c'è interferenza**. In effetti è quanto si osserva: se vediamo gli elettroni mandandogli contro dei fotoni, non c'è più interferenza!
Come si spiega?
Per vedere gli elettroni abbiamo dovuto inviare contro di essi dei fotoni dotati di una certa energia. I fotoni urtano gli elettroni e ne deviano il moto. Quindi l'elettrone che sarebbe finito in un certo punto, corrispondente ad esempio ad un massimo nella figura di interferenza precedente, magari è andato a finire in un minimo o in un altro punto qualunque. Pertanto la figura di interferenza non si forma più. I fotoni la “distruggono”.
Se cercassimo di diminuire questo effetto disturbante dovuto ai fotoni, potremmo mandarne di meno, cioè ridurre l'intensità della luce. Per cui alcuni elettroni potrebbero passare senza esser visti e produrre una interferenza, ma rimarrebbe l'effetto degli urti dei fotoni su tutti gli altri elettroni, quelli che continueremmo a vedere, e in definitiva non si avrebbe una figura di interferenza.
Per ridurre l'impatto dei fotoni si potrebbe allora scegliere luce di energia inferiore, cioè di minore frequenza e maggiore lunghezza d'onda. Non si può però diminuire la frequenza a piacere. Quando la lunghezza d'onda diventa paragonabile alle distanza tra i fori, si producono fenomeni di

diffrazione della luce inviata e, invece di vedere delle scintille emesse dagli elettroni osservati, vedremmo una serie di cerchi di diffrazione e non sarebbe più possibile capire da quale foro l'elettrone è passato.
In definitiva non è possibile fare un esperimento tale che ci consenta di vedere da che foro è passato ogni elettrone (cioè stabilirne la posizione iniziale – aspetto corpuscolare dell'elettrone) e che allo stesso tempo non perturbi la distribuzione di probabilità degli elettroni sul rivelatore (aspetto ondulatorio dell'elettrone).
Questa limitazione alle nostre possibilità sperimentali fu riassunta da Werner Heisenberg nel suo *principio di indeterminazione.*

Tutto ciò ci deve suggerire che la natura microscopica è assai diversa da quella macroscopica a noi nota. Non ha senso quindi pensare a un elettrone come una microscopica pallina, ma nemmeno come una microscopica onda, anche se esso rivela entrambi gli aspetti.

L'idea di complementarità

Il superamento delle contraddizioni implicite nel dualismo onda-corpuscolo fu un percorso complesso, che si sviluppò su due livelli:



Rappresentazione schematica e approssimativa del principio di complementarità. A grandi lunghezze d'onda l'aspetto ondulatorio è dominante, ma esso degenera in comportamento corpuscolare quando, progressivamente, si passa a lunghezze d'onda estremamente corte. Viceversa, passando da masse molto grandi a masse di dimensioni microscopiche, il carattere corpuscolare sfuma progressivamente e l'oggetto assume comportamenti ondulatori.

1. il primo fu quello della ricerca di un formalismo matematico in grado di descrivere in modo unitario i fenomeni;
2. il secondo fu quello dell'interpretazione di questo formalismo, dal punto di vista del suo reale potere conoscitivo.

Il primo livello ha generato la meccanica ondulatoria, i cui principi sono stati esaminati in questo Modulo.
Per quanto riguarda il secondo livello, i problemi da esso suscitati si sono dimostrati tutto sommato ben più complessi e sono ancora oggi oggetto di dibattito.
L'esistenza di grandezze non contemporaneamente osservabili (a causa del principio di indeterminazione) impedisce una descrizione classica, di tipo deterministico, dello svolgersi degli eventi nel tempo e nello spazio.
La stessa operazione di misura di una grandezza comporterà la perdita di conoscenza di una grandezza complementare. In particolare, le caratteristiche ondulatorie o corpuscolari saranno messe in evidenza, in modo complementare, a seconda dell'apparato di misura usato.
Sulla base di considerazioni di questo tipo nacque il **concetto di complementarità,** introdotto per la prima volta da Bohr, secondo il quale:
sia l'aspetto corpuscolare sia quello ondulatorio sono ineliminabili, e la particolare modalità descrittiva di un ente fisico dipende non solo dalle caratteristiche dell'ente in osservazione, ma anche da quelle dell'apparato sperimentale utilizzato per osservarlo.
Il significato del concetto di complementarità e le sue conseguenze sul piano conoscitivo sono stati approfonditi da Bohr e dai fisici della sua scuola. Le tesi di questo gruppo costituiscono la cosiddetta "interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica".
In modo molto semplificato ricordiamo due tesi fondamentali di questa interpretazione.

a. Poiché le grandezze fisiche a livello atomico non sono tutte contemporaneamente determinabili con una misura, non esiste più una descrizione "oggettiva" dei fenomeni nel senso della fisica classica. Nella fisica classica si poteva separare il comportamento dei corpi dal metodo di osservazione, che si poteva pensare perturbasse in modo trascurabile la situazione fisica. Ora invece il meccanismo di misura non è più separabile dagli eventi fisici, nel senso che concorre a determinare le caratteristiche del sistema: un evento non può più essere descritto "in sé", ma in relazione al particolare modo scelto per osservarlo.

b. Il concetto di complementarità e il principio di indeterminazione implicano che una parte delle osservabili del sistema non possa essere determinata con precisione. Ciò avviene non per l'imperfezione dello strumento di misura, ma per il fatto che "intrinsecamente" queste osservabili non possono avere un valore certo. Allora le leggi fisiche sono di tipo probabilistico, nel senso che solo una distribuzione statistica di eventi (e non il singolo evento) potrà essere esattamente prevista. Come si è visto a proposito del principio di indeterminazione, questa situazione pone dei problemi circa l'applicazione del principio di causalità ai fenomeni fisici: sembra che valga una forma di causalità debole, in cui a ogni effetto corrisponde sempre una causa, ma a una causa possono corrispondere più effetti.

Il dibattito sull'interpretazione della meccanica quantistica

Relativamente all'interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica, si è aperto un dibattito epistemologico che coinvolge il concetto stesso di "realtà" e la possibilità di una sua descrizione oggettiva. Il motivo che rende attuale questo dibattito sta nel fatto che la posizione dei fisici nei riguardi della complementarità traduce quasi sempre una loro concezione ultima nei riguardi della conoscibilità stessa del reale.
Per Bohr e i fisici legati alla sua scuola il principio di complementarità dice l'ultima parola sulla conoscenza fisica, la quale, quindi, si riduce a un insieme di concetti che non sono necessariamente in "corrispondenza biunivoca" con i presunti enti che essi descrivono: secondo questa linea di pensiero, è il nostro modo di "osservare" e di "misurare" che fa esistere un certo oggetto, l'"onda" o la "particella". Gli antagonisti di Bohr si ponevano invece in una prospettiva diametralmente opposta. Per essi il punto di partenza non è la descrizione formale dell'Universo, di qualsiasi natura essa sia, ma l'Universo stesso, cioè la realtà "esterna" e "autonoma" rispetto al soggetto che la osserva, della quale cercano le leggi più profonde. La loro convinzione è che l'unica conoscenza accettabile nella quale la mente umana può riposare senza contraddizioni sia quella che consente di "oggettivare" in modo unico gli enti concepiti come realmente esistenti al di fuori del soggetto pensante. Questa seconda posizione fu assunta in modo particolarmente deciso da Einstein che, nel periodo finale della sua vita, si dedicò al tentativo di superare la visione probabilistica della nuova meccanica come è ben testimoniato dal brano seguente:

"*Le nostre prospettive scientifiche sono ormai agli antipodi fra loro. Tu* [Einstein si sta rivolgendo a Born, anch'egli seguace della scuola di Copenaghen] *ritieni che Dio giochi a dadi col mondo; io credo invece che tutto obbedisca ad una legge, in un mondo di realtà obiettive che cerco di cogliere per via furiosamente speculativa. Lo credo fermamente, ma spero che qualcuno scopra una strada più realistica – o meglio un fondamento più tangibile – di quanto non abbia saputo fare io. Nemmeno il grande successo iniziale della teoria dei quanti riesce a convincermi che alla base di tutto vi sia la casualità, anche se so bene che colleghi più giovani considerano quest'atteggiamento come un effetto di sclerosi. Un giorno si saprà quale di questi due atteggiamenti istintivi sarà stato quello giusto.*"

► A. Einstein, *Lettera a Born*

Anche fra coloro che si sono collocati in una prospettiva di totale accettazione del principio di complementarità, per quanto riguarda le sue applicazioni in campo fisico, si trovavano (e si trovano oggi) posizioni più prudenti per quanto riguarda invece le sue conseguenze in campo filosofico. Valga per tutti il seguente brano di Heisenberg, tratto da una sua conferenza del 1958, nel quale l'antagonismo radicale fra Einstein e la scuola di Copenaghen appare decisamente più problematizzato.

"*I nostri enunciati sullo spazio e sul tempo devono dunque riuscire differenti, secondo che intendiamo parlare delle nostre innate intuizioni* a priori *o di quegli schemi d'ordine esistenti in natura, indipendenti da ogni osservazione umana, sui quali è applicato, teso sopra, per così dire, quanto succede obiettivamente nell'Universo. Similmente la fisica classica è bensì il fondamento* a priori *della fisica atomica e quantistica, ma essa non è giusta in tutto, cioè vi sono vasti complessi di fenomeni che non possono essere descritti nemmeno approssimativamente coi concetti della fisica classica. In questi campi della fisica atomica va perduta una gran parte dell'antica fisica intuitiva. E qui non si tratta solo dell'applicabilità dei concetti e delle leggi di quella fisica, ma di tutta l'idea di realtà che ha costituito la base delle scienze naturali esatte fino all'epoca della fisica attuale. Con la frase "idea di realtà" alludiamo qui a quella concezione che ammette l'esistenza di fenomeni obiettivi svolgentisi in un modo determinato nello spazio e nel tempo, indipendentemente dal fatto che siano osservati o no. Nella fisica atomica le osservazioni non si possono più obiettivare in questo modo tanto semplice, cioè non possono essere ricondotte a qualche cosa che si svolga oggettivamente e in modo descrivibile nello spazio e nel tempo. Qui rimane ancora da aggiungere che nella scienza della natura non si tratta della natura stessa, ma appunto della scienza della natura, cioè della natura come un uomo la pensa e la descrive. Non intendiamo dire che con ciò s'introduca un elemento di soggettività nella scienza della natura; non pretendiamo affatto che ciò che succede nell'Universo dipenda dalla nostra osservazione, ma accenniamo al fatto che la scienza sta tra la natura e l'uomo e che noi non possiamo rinunciare all'uso delle rappresentazioni date dall'intuizione o innate nell'uomo*".

► W. Heisenberg e altri, *Discussione sulla fisica moderna*

Formule riguardanti il corpo nero per eventuali esercizi

<u>Quanto di energia</u>

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar\omega$$

$$h = 6,62606957 \cdot 10^{-34} J \cdot s = 4,135667516 \cdot 10^{-15} eV \cdot s$$

$$\hbar = 1,054571726 \cdot 10^{-34} J \cdot s = 6,58211928 \cdot 10^{-16} eV \cdot s$$

<u>Legge di Wien</u>

in funzione della lunghezza d'onda

$$T \cdot \lambda_{\max} = 2,8977685 \cdot 10^{-3} m \cdot K$$

in funzione della frequenza

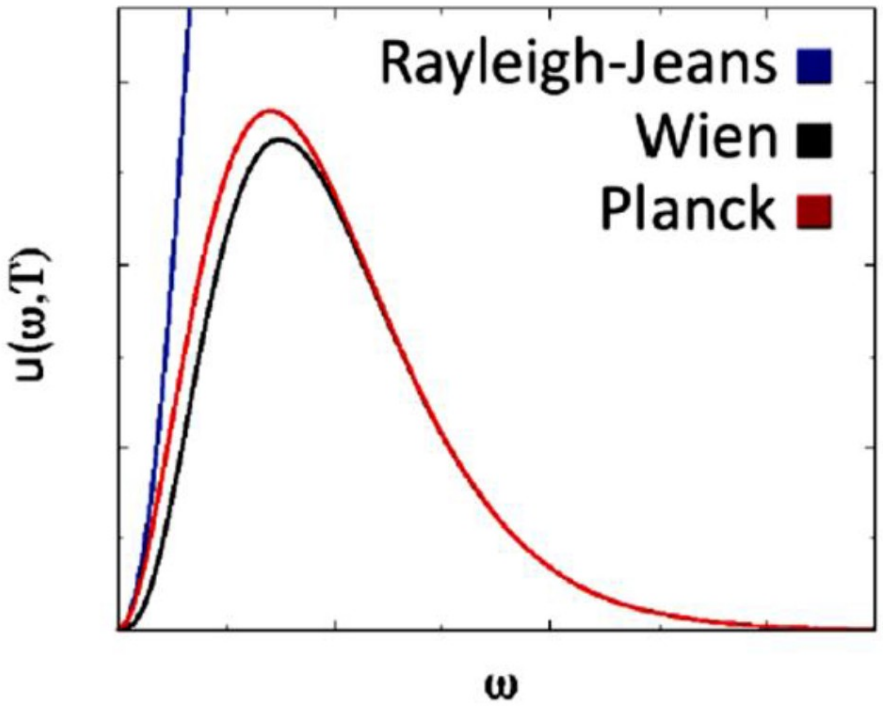
$$\frac{f_{\max}}{T} = 5,8789327 \cdot 10^{10} Hz \cdot K^{-1}$$

Legge di Stefan-Boltzmann

$$P_e \text{ (potere emissivo)} = \sigma T^4$$

Potere emissivo = emittanza = potenza /superficie = intensità di energia

$$\sigma = 5,67 \,.\, 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{K}^4)$$



EFFETTO COMPTON (1923)

Un fascio di raggi X viene inviato su un bersaglio di grafite: si analizza la radiazione diffusa al variare dell'angolo di diffusione.
Si osserva un picco di radiazione in una lunghezza d'onda maggiore di quella incidente (quindi frequenza minore). Ciò non è spiegabile dal punto di vista classico.

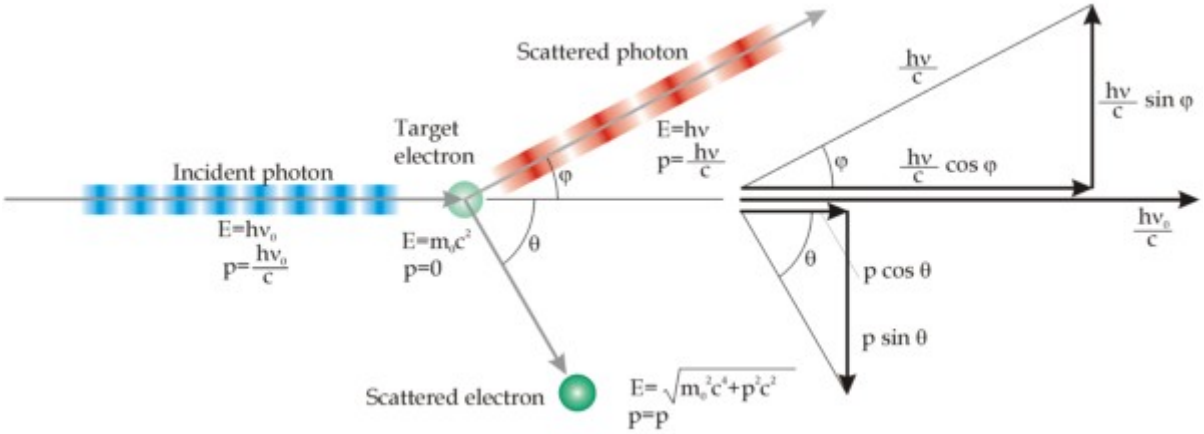
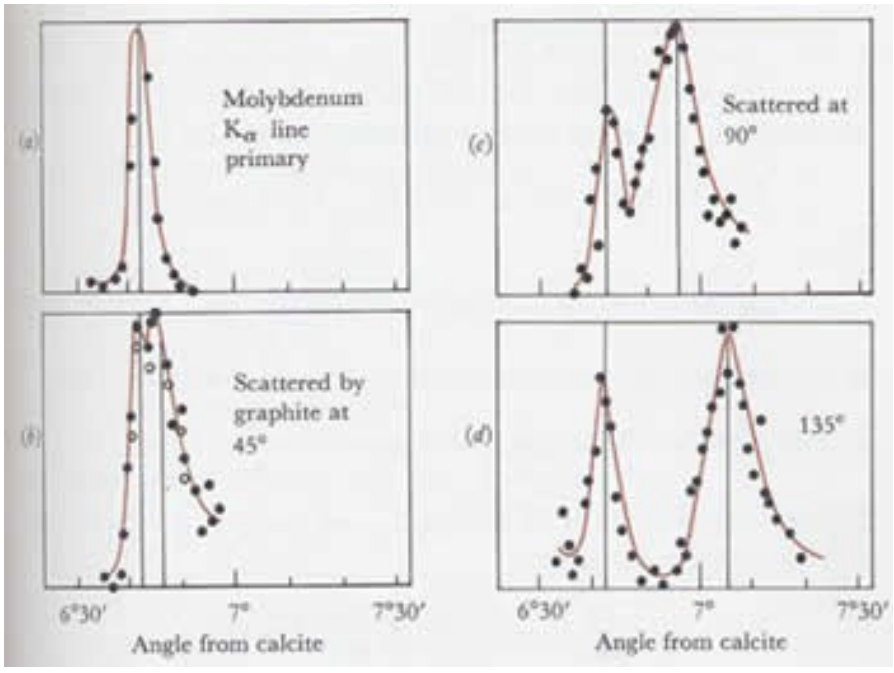


Fig. 1

Trattando il fenomeno come un urto elastico (attribuendo cioè alla radiazione X natura corpuscolare) e applicando la conservazione dell'energia e della quantità di moto (formule relativistiche), si ottiene che la differenza tra la lunghezza d'onda del secondo picco e quella della radiazione incidente è data da:

$$\lambda_f - \lambda_i = \Delta\lambda = \frac{h}{m_o c}\left(1-\cos\varphi\right) = \frac{2h}{m_o c}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\varphi}{2}$$

La quantità h/m_0c è detta "**lunghezza d'onda Compton**". Si noti che:
- $\Delta\lambda$ dipende solo dall'angolo di deviazione φ e non dalla lunghezza d'onda incidente.
- se $\varphi = 0$, $\Delta\lambda = 0$, è il caso dell'urto radente in cui il fotone non devia;
- se $\varphi = 180°$, $\Delta\lambda = 2h/m_0c$, si ha il massimo spostamento Compton. E' il caso dell'urto frontale in cui il fotone viene diffuso nella direzione opposta a quella di incidenza.



Risoluzione dell'urto fotone-elettrone

Si consideri la situazione raffigurata in figura 1. L'elettrone è inizialmente fermo.
Si uguagliano la quantità di moto iniziale e finale e l'energia iniziale e finale del sistema fotone-elettrone.

[E = energia; p = quantità di moto; V = velocità elettrone dopo l'urto; ν = frequenza; m_o = massa a riposo dell'elettrone; $E_{fotone} = h\nu$; $p_{fotone} = E/c = h\nu/c$]

E totale iniziale: $$E_i = h\nu_i + m_0 c^2$$

E totale finale: $$E_f = h\nu_f + \gamma m_0 c^2 = h\nu_f + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

La quantità di moto deve essere scomposta nelle direzioni x e y.

<u>Asse x</u>

Quantità di moto iniziale: $$p_i(fotone) = \frac{h\nu_i}{c}$$

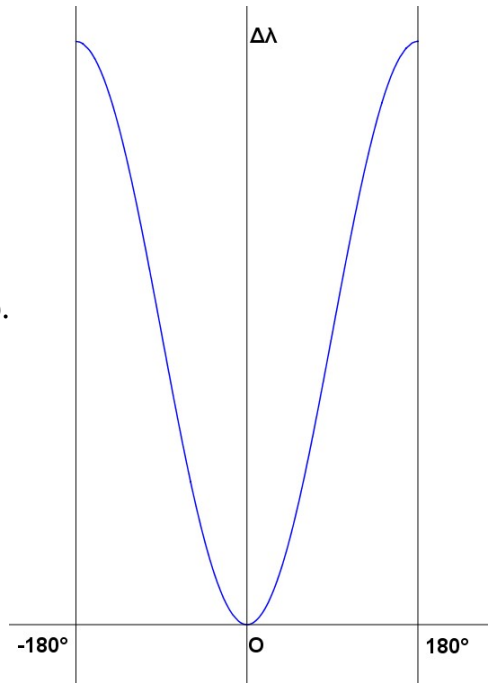
Quantità di moto finale: $$p_f(fotone + elettrone) = \frac{h\nu_f}{c}\cos\varphi + \frac{m_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cos\vartheta$$

<u>Asse y</u>

Quantità di moto iniziale: $$p_{yi} = 0$$

Quantità di moto finale: $$p_f(fotone + elettrone) = \frac{h\nu_f}{c} sen\varphi + \frac{m_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} sen\vartheta$$

Applicando la conservazione di quantità di moto ed energia, con alcuni calcoli si perviene alla :

$$\lambda_f - \lambda_i = \Delta\lambda = \frac{h}{m_o c}\left(1-\cos\varphi\right) = \frac{2h}{m_o c} sen^2\frac{\varphi}{2}$$

Quindi lo spostamento Compton Δλ dipende solo dall'angolo φ.
A destra la rappresentazione grafica della relazione tra Δλ e l'angolo di deviazione della radiazione X.