

# MECCANICA dei FLUIDI

La meccanica dei fluidi si occupa dello studio di liquidi e aeriformi in quiete o in movimento.

- L'IDROSTATICA studia le leggi che regolano lo stato dei liquidi in quiete.
- L'IDRODINAMICA studia i liquidi in moto in tubi e condotte.
- L'AEROSTATICA studia le condizioni di equilibrio degli aeriformi.
- L'AERODINAMICA studia il moto reciproco di corpi solidi e aeriformi.

## **IDROSTATICA**

Nell'idrostatica tutte le leggi enunciate valgono per un liquido perfetto; cioè un liquido ideale che ha queste tre proprietà:

**fluidità:** nei liquidi le molecole sono legate tra loro da forze di coesione minori che nei solidi. Ciò permette agli strati di molecole dei liquidi di scorrere gli uni sugli altri. Esistono liquidi più o meno fluidi; acqua, alcool, benzina sono liquidi fluidi, gli oli lubrificanti e sostanze affini si dicono invece viscosi, dove la viscosità è l'esatto opposto della fluidità.

**incomprimibilità:** sottoponendo un liquido anche a forti pressioni il suo volume subisce variazioni molto piccole, cioè i liquidi hanno volume proprio. Nelle leggi si considerano liquidi perfettamente incomprimibili.

**elasticità:** è facile modificare la forma di un liquido per esempio immergendovi un oggetto, ma appena l'oggetto viene rimosso, la forma del liquido torna identica a quella iniziale.

## **SUPERFICIE LIBERA DEI LIQUIDI**

I liquidi prendono la forma del recipiente che li contiene; una parte del liquido, quella che non è a contatto del recipiente, in genere la parte superiore, rimane libera. Questa superficie libera viene detta superficie di livello: essa è perpendicolare in ogni suo punto alla direzione del filo a piombo.

## **LA PRESSIONE**

Ogni forza agendo su una superficie esercita una pressione inversamente proporzionale alla superficie stessa:

$$p = \frac{F}{S}$$

Quindi la pressione è la grandezza scalare data dal rapporto tra la componente della forza perpendicolare ad una superficie e la superficie stessa.

L'unità di misura internazionale della pressione è il Pascal:  $\frac{N}{m^2} = Pa$ .

Esistono però altre unità di misura della pressione, come vedremo in seguito.

## IL PRINCIPIO DI PASCAL

Se si esercita dall'esterno una forza su una porzione di superficie di un liquido in quiete, la pressione così generata si trasmette inalterata a tutti i punti del liquido.

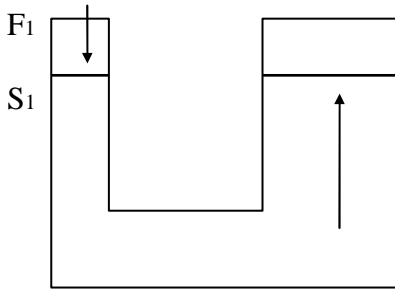
Così il liquido eserciterà questa stessa pressione sulle pareti del recipiente: questa pressione genera in ogni punto una forza perpendicolare alla porzione di superficie considerata.

$$p = \frac{F}{S} \quad F = p \cdot S$$

Forando un palloncino con uno spillo in vari punti è possibile vedere che gli zampilli si dipartono perpendicolari alla superficie del palloncino.

## TORCHIO IDRAULICO

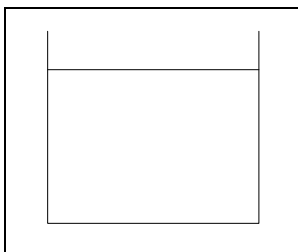
È costituito di due vasi comunicanti di diversa sezione. Serve per ottenere una forza grande applicandone una più piccola.



Sfrutta il principio di Pascal. Poiché la pressione del liquido è uguale in tutti i punti, agisce la stessa pressione sulle due superfici mobili:  $p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ ;  $F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$ , quindi  $F_2 \gg F_1$ .

## PRESSIONE IDROSTATICA – LEGGE DI STEVINO

Una pressione si sviluppa spontaneamente in un liquido in quiete per effetto del peso delle parti superiori su quelle inferiori: tale pressione si dice “pressione idrostatica”.



Calcolo la pressione idrostatica a profondità h.  
Ricordiamo che relazione c'è tra densità e peso specifico:

$$m = d \cdot V$$

$$P = psV$$

$$P = mg$$

$$\frac{P}{m} = \frac{ps}{d} = g$$

La pressione agente a profondità h sarà data dal rapporto tra il peso del volume di acqua sovrastante e la superficie.

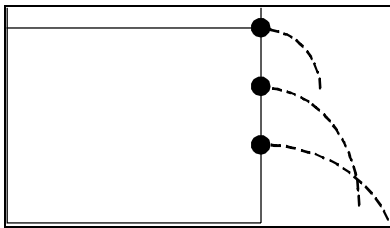
$$p = \frac{P}{S}$$

$$P = mg = dgV = dgSh$$

$$p = \frac{dgSh}{S} = dgh$$

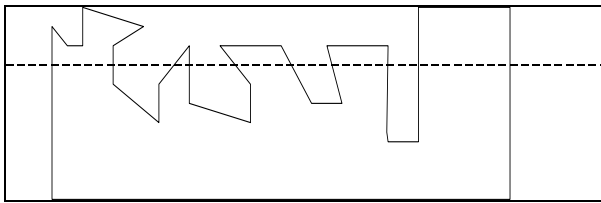
$$p = dgh$$

La legge di Stevino afferma che la pressione idrostatica è direttamente proporzionale alla profondità e alla densità del fluido considerato.



Essendo la forza proporzionale alla pressione, il getto uscirà con più forza a profondità maggiore.

## PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI



Nel caso si abbiano dei recipienti tra loro comunicanti, anche di diversa forma, contenenti lo stesso liquido, il livello raggiunto dal liquido in quiete è lo sempre stesso in tutti i recipienti.

Dati due vasi comunicanti, considero una superficie immaginaria di separazione tra il liquido contenuto nel primo vaso e il liquido contenuto nel secondo. Ipotizzando per assurdo che le altezze dei liquidi siano diverse, agiranno due diverse pressioni idrostatiche e quindi due diverse forze sulla stessa superficie.

$$p_1 = dgh_1 \quad p_2 = dgh_2$$

$$F_1 = dgh_1S \quad F_2 = dgh_2S$$

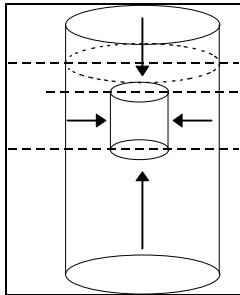
Se  $h_1 > h_2$ , allora  $F_1 > F_2$ . La risultante delle due forze non sarà nulla, avrà modulo  $F_1 - F_2$ , sarà parallela alle due forze e di verso uguale alla forza maggiore. Ciò implicherebbe un moto del liquido nella direzione di tale forze risultante, ma il liquido è in equilibrio idrostatico per ipotesi. Quindi le due altezze devono essere uguali.

Nel caso di liquidi non miscibili, le altezze che i due liquidi raggiungono nei due vasi in condizioni di equilibrio sono inversamente proporzionali alle densità:  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{d_1}$ .

## PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Un liquido esercita su un corpo in esso immerso una spinta, applicata nel baricentro del corpo, diretta verticalmente verso l'alto e pari al peso del volume di liquido spostato:  $F_A = p_{sl} \cdot V_C$ .

Consideriamo un corpo cilindrico immerso in un liquido; le forze dovute alla pressione idrostatica si annullano sulla superficie laterale per simmetria. La forza agente sulla base superiore sarà dovuta alla pressione idrostatica a profondità  $h_1$  e la forza agente sulla base inferiore sarà dovuta alla pressione idrostatica a profondità  $h_2$



$$\begin{aligned}
 h_1 \quad F_1 & & F_1 &= p_1 \cdot S & & F_2 &= p_2 \cdot S \\
 & & F_1 &= dgh_1 \cdot S & & F_2 &= dgh_2 \cdot S \\
 & & F_A &= F_2 - F_1 & & & \\
 h_2 \quad F_2 & & F_A &= dgh_2 S - dgh_1 S & & & \\
 & & F_A &= dgS(h_2 - h_1) & & & 
 \end{aligned}$$

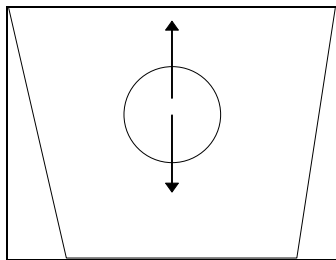
ma  $d \cdot g = p_s$  e  $h_2 - h_1 = h_{cilindro}$   
 $S \cdot h = \text{Volumecilindro}$

In conclusione

$$F_A = p_{sl} \cdot V_C$$

## CONDIZIONE DI GALLEGGIAMENTO

Consideriamo un corpo pieno e di densità omogenea immerso in un liquido. Su di esso agiscono due forze, la forza peso e la forza di Archimede.

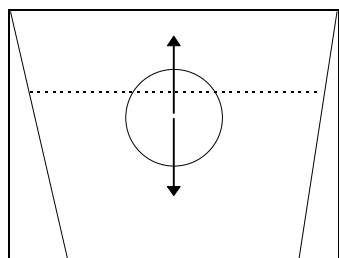


CASO 1: Peso > Forza di Archimede, cioè:  
 peso specifico del corpo > peso specifico del liquido.  
 Il corpo affonda.

CASO 2: Forza di Archimede > Peso, cioè:  
 peso specifico del liquido > peso specifico del corpo.  
 Il corpo galleggia.

CASO 3: Peso = Forza di Archimede, cioè:  
 peso specifico del liquido = peso specifico del corpo.  
 Il corpo permane in equilibrio indifferente.

## GALLEGGIAMENTO: percentuale di volume immerso



Forza di Archimede > Peso. Il corpo viene spinto verso la superficie, fino a che si trova in equilibrio, rimanendo immerso solo parzialmente. Il peso del corpo sarà allora uguale alla forza di Archimede agente sulla

$$\begin{aligned}
 & p s_c \cdot V_c = p s_l \cdot V_i \\
 \text{parte immersa:} & \quad \frac{V_i}{V_c} = \frac{p s_c}{p s_l}
 \end{aligned}$$

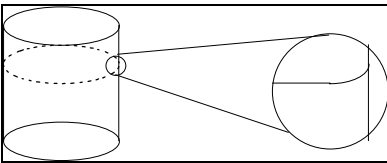
## FORZE AGENTI TRA LE MOLECOLE DI UN LIQUIDO

Oltre alla forza di gravità, all'interno di un liquido, agiscono altri 2 tipi di forze: forze di **coesione** e forze di **adesione**. Le forze di coesione sono forze attrattive che tendono a tenere le molecole del liquido il più compatte possibili. Le forze di adesione sono forze attrattive fra le molecole del liquido e le molecole del recipiente; tendono ad allontanare le molecole della superficie fra loro per attrarle sulle pareti del recipiente.

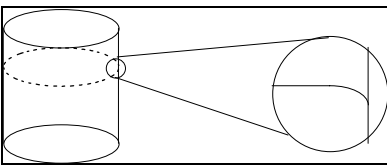
- Le forze di coesione sono evidenti in vari fenomeni: formazione di gocce, bolle di sapone, il fatto che la superficie del liquido si comporti come una membrana tesa.
- Le forze di adesione si notano osservando la forma che assume per esempio l'acqua presso i bordi della superficie libera vicino alla pareti.

Possiamo dividere i liquidi in 2 tipi.

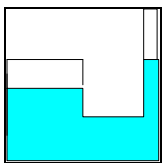
A. Liquidi che bagnano le pareti del recipiente: in questi casi le forze di adesione sono più grandi di quelle di coesione e la superficie libera in un recipiente è concava vicino alla parete.



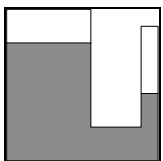
B. Liquidi che non bagnano le pareti del recipiente: le forze di coesione sono maggiori di quelle di adesione e la superficie libera ha forma convessa vicino alla parete.



Queste caratteristiche sono ancora più accentuate nei vasi capillari del diametro di 1 mm o meno. Inoltre nei vasi capillari non vale il principio dei vasi comunicanti.



I liquidi che bagnano le pareti nei tubi capillari salgono oltre il livello degli altri vasi.

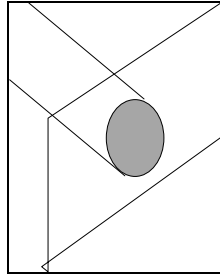


I liquidi che non bagnano le pareti raggiungono un livello più basso nei vasi capillari rispetto agli altri vasi.

# IDRODINAMICA

## Legge di CASTELLI

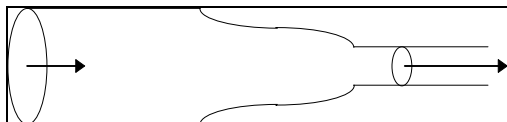
Consideriamo un liquido, che, a regime, scorre in un tubo in modo che ogni sezione del condotto è attraversata dal liquido con una velocità media  $v$ . Non vi sono turbolenze.



Si definisce “portata” in volume del liquido nel tubo il rapporto fra il volume del liquido che passa in una data sezione del tubo e il tempo impiegato ad attraversarla (cioè il volume di liquido che attraversa la sezione nell’unità di tempo); è anche uguale al prodotto della sezione per la velocità.

$$\text{La portata è: } p = \frac{V}{t} = \frac{A \cdot s}{t} = A \cdot v \quad \left[ \frac{m^3}{s}; \frac{l}{s} \right]$$

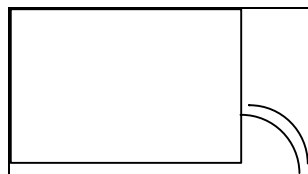
In condizioni di regime, la portata è costante (legge di Castelli), pertanto le velocità del liquido in un condotto a sezione variabile, sono inversamente proporzionali alle aree delle sezioni del condotto.



$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \quad \text{cioè} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

## Teorema di TORRICELLI

La velocità di effluvio di un liquido da un foro posto sul fondo del recipiente è pari alla velocità che acquisterebbe la stessa massa di liquido cadendo dalla stessa altezza  $h$ , almeno se il foro è piccolo rispetto alla superficie del contenitore.



$$v = \sqrt{2gh}$$

Sia  $A$  la superficie superiore del liquido e  $a$  la superficie del foro di uscita.

In condizioni di regime, la massa di liquido che scende nella zona più in alto deve essere equivalente alla massa di liquido che esce dal foro.

$$\text{Per il principio di conservazione dell’energia: } mgh + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_a^2$$

$$\text{Quindi: } 2gh + v_A^2 = v_a^2.$$

$$\text{Per la legge di Castelli: } A \cdot v_A = a \cdot v_a \quad \text{quindi} \quad v_A = \frac{a}{A} \cdot v_a$$

$$2gh + \frac{a^2}{A^2} v_a^2 = v_a^2$$

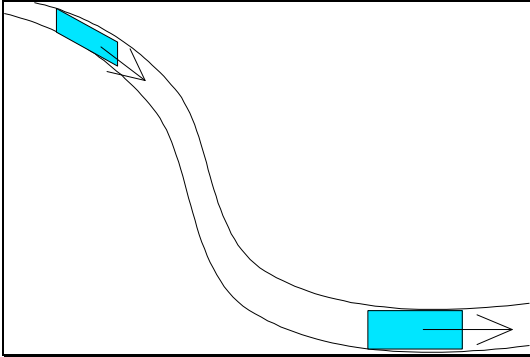
$$v_a^2 \left( 1 - \frac{a^2}{A^2} \right) = 2gh$$

$$v_a = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}$$

Se  $a$  è molto minore di  $A$ , il denominatore è circa 1 e la velocità coincide con la velocità di impatto al suolo.

## Teorema di BERNOULLI

Il teorema di Bernoulli è il principio di conservazione dell'energia per l'idrodinamica. Considero una massa  $m$  di acqua che si muove in un condotto con sezione variabile e con dislivelli. Confronto la massa di acqua in una posizione 1 e in una posizione successiva 2.



Per il teorema dell'energia cinetica, la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro totale, in questo caso alla somma dei lavori dovuti alla forza agente di gravità e alle forze di pressione.

$$L = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = L_1 + L_2$$

$$L_1 = mgh_1 - mgh_2$$

$$L_2 = p_1S_1\Delta x_1 - p_2S_2\Delta x_2$$

$$S_1\Delta x_1 = S_2\Delta x_2 = V; L = p_1V - p_2V$$

$$m = \rho V; V = \frac{m}{\rho}$$

$$mgh_1 - mgh_2 + p_1 \frac{m}{\rho} - p_2 \frac{m}{\rho} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + p_1V = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + p_2V, \text{ quindi}$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 + pV = \text{cost}$$

$$\rho gh + p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$

Il teorema di Bernoulli afferma che è costante la somma della pressione piezometrica, della pressione cinetica e della pressione di gravità.

Nel caso in cui nel condotto non vi siano variazioni di altezza, il teorema di Bernoulli si riduce a:

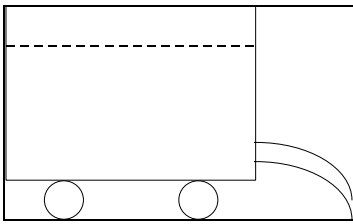
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$

questo vuol dire che se la velocità aumenta, quindi se la sezione è minore (per la legge di Castelli), la pressione diminuisce (paradosso idrodinamico).

La pressione è più bassa dove il tubo è più sottile, al contrario di ciò che si potrebbe pensare.

## REAZIONE DEL GETTO FLUIDO

La forza del getto uscente da un foro è proporzionale alla densità del fluido, al quadrato della velocità e alla superficie del foro:  $F = \rho A v^2$



Applichiamo il teorema dell'impulso:

$$F = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

$$\Delta q = \Delta(mv)$$

$$m = \rho \Delta V$$

$$F = \frac{\rho \Delta V v}{\Delta t} = \rho p v = \rho A v \cdot v = \rho A v^2$$

Ciò che varia nell'uscita dal foro è il volume (la portata è  $p = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ ), non è la velocità che consideriamo costante,  $v = \sqrt{2gh}$ , immaginando che il livello del liquido nel serbatoio venga mantenuto sempre uguale, immettendone in continuazione per compensare quello che esce.

Quindi  $F = \rho A v^2$ , come volevasi dimostrare. Per la legge di azione e reazione, il carrello viene spinto in avanti con la stessa forza. (funzionamento dei motori a reazione)



# AEROSTATICA

L'aerostatica studia il comportamento di gas e vapori. I gas in condizioni normali sono nello stato di aeriforme; i vapori invece in condizioni normali sono liquidi.

Le caratteristiche dell'aeriforme perfetto sono:

- FLUIDITÀ: gli aeriformi sono molto più fluidi dei liquidi, nel senso che le forze di coesione delle molecole sono trascurabili.
- COMPRIMIBILITÀ ed ESPANDIBILITÀ: un aeriforme non ha né forma né volume propri e tende ad occupare tutto lo spazio a sua disposizione. Viceversa anche applicando forze di scarsa intensità è possibile diminuire in modo significativo il volume di un aeriforme.
- ELASTICITÀ: è possibile cambiare la forma che un aeriforme acquisisce in un recipiente, con una forza, ma al cessare di questa, l'aeriforme riprende la forma iniziale.

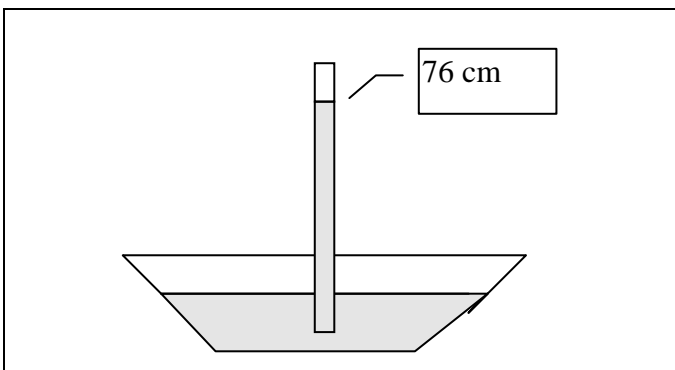
Per gli aeriformi valgono come per i liquidi il principio di Pascal e di Archimede.

Non vale invece la legge di Stevino. La relazione tra pressione e altitudine è molto più complessa e può solo esser studiata empiricamente, variando anche la temperatura in quota.

## LA PRESSIONE ATMOSFERICA

La pressione detta atmosferica è generata dalla massa di aria che circonda la terra stessa a causa del campo gravitazionale. Poiché l'aria ha una densità di  $\rho = 1,3 \frac{kg}{m^3}$  circa, l'atmosfera pesa e genera una pressione sulla superficie terrestre.

Esperimento di TORRICELLI - misura della pressione atmosferica



Evangelista Torricelli, allievo di Galilei, nel 1644 compì un esperimento con cui poté misurare la pressione atmosferica e generare il “vuoto”, detto poi “vuoto torricelliano”. Fu proprio questo secondo risultato che destò più scalpore e discussioni soprattutto in ambito filosofico per aver dimostrato l'esistenza del vuoto contro l' “*horror vacui*”.

Torricelli riempì una bacinella di mercurio e vi capovoltse dentro un tubo anch'esso pieno di mercurio, della sezione di circa un cm quadrato. Il mercurio non finiva tutto nella bacinella, ma ne rimanevano nel tubo (canna barometrica) 76 cm. Questo poteva accadere perché evidentemente sulla superficie S alla base del tubo stesso la forza peso del mercurio era bilanciata da una forza uguale ed opposta. Cosa genera questa forza? Non essendo applicate altre forze esterne, la forza agente verso l'alto sul mercurio contenuto nella canna deve essere prodotta da una pressione agente sul mercurio contenuto nella bacinella. Tale pressione è dovuta al peso dell'atmosfera.

Quindi la pressione atmosferica deve essere uguale alle pressione idrostatica di 76 cm di mercurio.  $patm = \rho gh = 13.590 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 0,76m = 101218.32Pa$

Calcoli più precisi forniscono il risultato corretto:

$$patm = 101.325 Pa = 1atm = 760mmHg = 760Torr$$

## BAROMETRI E MANOMETRI

Esistono due tipi di strumenti per la misura della pressione degli aeriformi: i barometri per misurare la pressione atmosferica (il funzionamento è quello della canna barometrica di Torricelli) e i manometri per misurare la pressione degli aeriformi contenuti in un recipiente (ad esempio le gomme dell'auto).

## **AERODINAMICA**

Studia le forze che intervengono nel moto relativo tra un fluido e un oggetto solido. Gli esperimenti relativi, infatti, vengono spesso svolti nelle cosiddette gallerie del vento.

Ci limitiamo a ricordare la LEGGE DI STOKES che descrive la forza di attrito viscoso che oppone un fluido al moto di caduta di un oggetto.

$$F = \eta K v$$

Dove  $\eta$  è il coefficiente di attrito viscoso,  $K$  un coefficiente che dipende dalla forma geometrica dell'oggetto (più o meno aerodinamico),  $v$  è la velocità.

La questione interessante è appunto che tale forza di attrito aumenta con la velocità; quindi, nella caduta, ad un certo punto la forza di attrito uguaglierà la forza peso, l'accelerazione si annullerà e il corpo procederà di moto uniforme.

Per un oggetto sferico,  $K = 6\pi r$ , quindi

$$F = 6\pi r \eta v$$