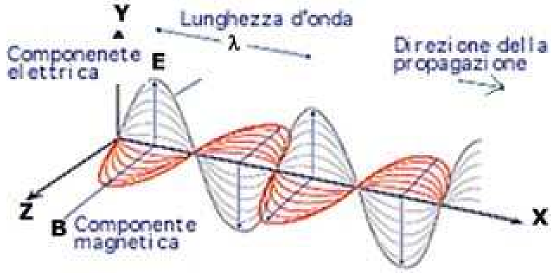
LE ONDE

DEFINIZIONE: un'onda elastica rappresenta la propagazione di una perturbazione che trasporta energia ma non materia. Si possono distinguere onde meccaniche o materiali, per le quali la propagazione è possibile solo dentro un mezzo elastico (suono, onde liquide…) e onde non materiali che si propagano anche nel vuoto (onde elettromagnetiche).

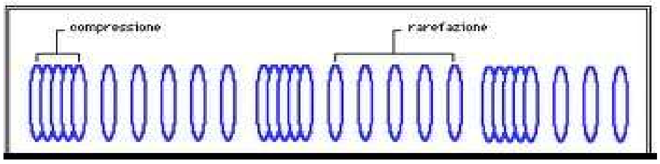
A seconda del numero di direzioni di propagazione si può distinguere tra:
- onde monodimensionali (corda vibrante);
- onde bidimensionali (membrana del tamburo, onde liquide);
- onde tridimensionali (suono).

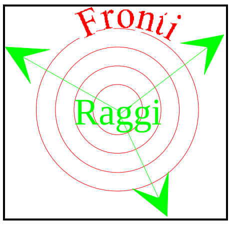
Prendendo in considerazione la direzione di propagazione dell'onda e quella secondo cui avvengono le vibrazioni del mezzo, si possono classificare le onde in :

≈ **trasversali**, se ogni punto del sistema esegue vibrazioni in direzione perpendicolare a quella di propagazione (corda vibrante, onde elettromagnetiche...);



≈ **longitudinali**, se le vibrazioni avvengono nella stessa direzione secondo cui si propaga l'onda (molla che oscilla accorciandosi e allungandosi, onde sonore…).

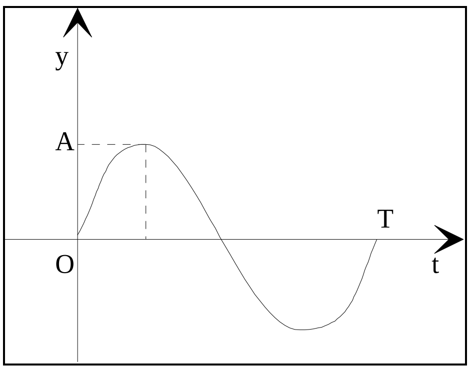




Le onde possono essere rappresentate graficamente mediante raggi corrispondenti alle direzioni di propagazione e mediante fronti d'onda. Il fronte d'onda è la linea congiungente tutti i punti dell'onda che si trovano in fase ed è perpendicolare in ogni punto alle direzioni di propagazione.

Analisi dell'onda monodimensionale nello spazio e nel tempo (corda vibrante)

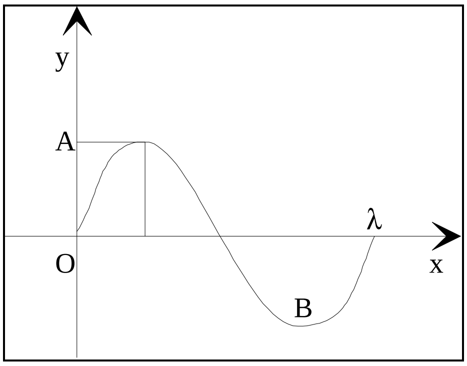
Dato che un'onda si propaga nel tempo e nello spazio, la possiamo raffigurare in due modi.



CASO 1
Ho fissato un punto della corda e osservo il suo moto nel tempo.

$\overline{OT}$ è il periodo = distanza temporale tra due posizioni successive identiche

$\overline{OA}$ è l'ampiezza = massima elongazione del punto mobile



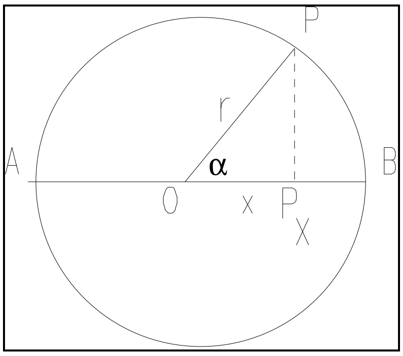
CASO 2
Ho fissato un istante di tempo e osservo i punti della corda. (fotografia)
λ è la lunghezza d'onda, cioè la distanza spaziale tra due punti successivi che hanno la stessa y.
La velocità V è il rapporto tra la distanza percorsa dall'onda in un periodo e il periodo.

$$V = \frac{\lambda}{T} \quad \text{oppure} \quad V = \lambda \cdot \nu$$

La frequenza ν è il numero di oscillazioni al secondo, si misura in Hz.
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ è la pulsazione, si misura in rad / s.
Tutti i punti dell'onda che si trovano nella stessa posizione y, cioè che distano di kT o di kλ, si dicono in fase. Punti che occupano posizioni caratterizzate da y opposte si dicono in opposizione di fase.

Equazione d'onda

L'equazione di un'onda sarà descritta da una funzione di due variabili, posizione e tempo.



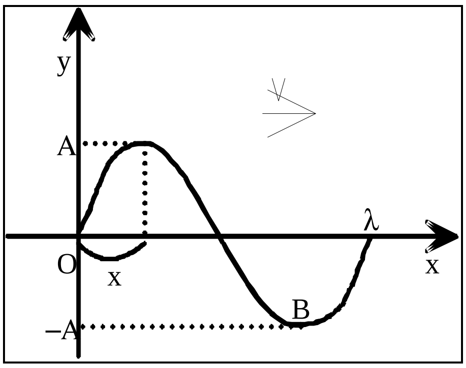
Moto armonico semplice

ω è la velocità angolare;
prendendo come posizione iniziale B, si ha:

$$\omega = \frac{\alpha}{t}; \alpha = \omega t;$$
$$x = r \cos \omega t;$$
$$t = 0, \rightarrow x = r$$

Posso prendere come posizione iniziale O ($r = sen\omega t$), quindi un moto armonico è esprimibile indifferentemente con la funzione seno o coseno. In generale:
$x = rsen(\omega t + \varphi)$; dove φ è l'angolo di fase che dipende dalla posizione iniziale.

Consideriamo ora una corda vibrante.
Supponiamo che l'equazione del moto del punto O sia: $y = Asen\ \omega t$, dove A è l'ampiezza del moto, e supponiamo che l'impulso ondulatorio si sposti verso destra con velocità V. L'onda arriverà nel generico punto P con un certo ritardo $\tau = \dfrac{x}{V}$, cioè P assumerà le stesse posizioni y di O, ma dopo un tempo τ.



$$y = Asen\ \omega\left(t - \frac{x}{V}\right); \omega = \frac{2\pi}{T};$$
$$y = Asen\ \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right); VT = \lambda;$$
$$y = Asen\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$$
$$y = Asen\ \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right); dove\ \frac{2\pi}{\lambda} = k$$

k è detto numero d'onda in quanto rappresenta il numero di lunghezze d'onda contenute in uno spazio equivalente a 2π.
In definitiva l'equazione d'onda può essere scritta come: $y = Asen(\omega t - kx)$, dove il segno meno dipende dal fatto che l'onda si sposta verso la direzione positiva dell'asse x (onda progressiva).
L'equazione $y = Asen(\omega t + kx)$ rappresenta un'onda regressiva.

FENOMENI ONDULATORI

I principali fenomeni a cui sono soggette le onde sono:

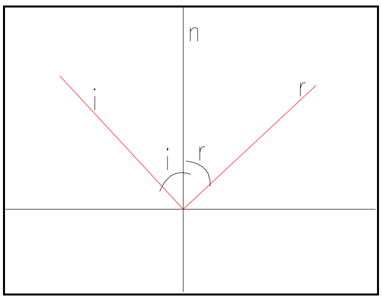
Riflessione — Non tipicamente ondulatori
Rifrazione

Diffrazione — Tipicamente ondulatori
Interferenza

RIFLESSIONE

La riflessione avviene quando l'onda incontra un' ostacolo da cui viene respinta e si propaga quindi all'indietro.

Leggi della Riflessione



Rappresento le direzioni d'onda tramite raggi.

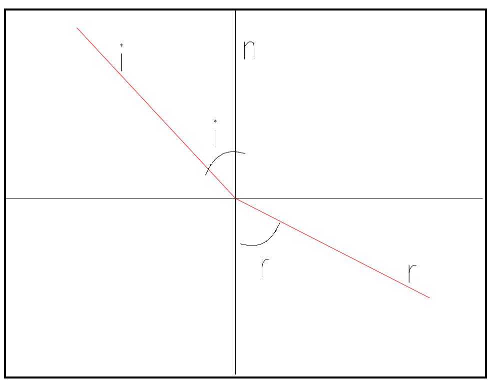
n = retta normale all'ostacolo;
i = raggio incidente;
r = raggio riflesso;
$\hat{i}$ = angolo di incidenza;
$\hat{r}$ = angolo di riflessione.

1. Raggio incidente, raggio riflesso e normale all'ostacolo appartengono ad uno stesso piano.
2. L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

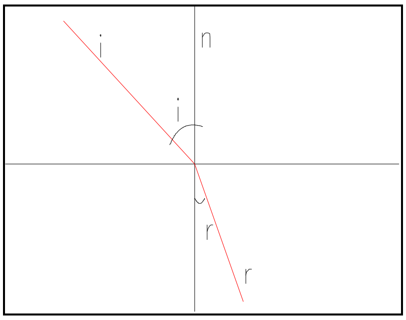
Se l'onda è circolare, il centro dell'onda incidente è simmetrico di quello dell'onda riflessa.

RIFRAZIONE

La rifrazione si ha quando un'onda attraversa la superficie di separazione di due mezzi diversi o di diversa densità. Si modifica, così la sua direzione di propagazione e la sua lunghezza d'onda. Rimane invece costante la frequenza.



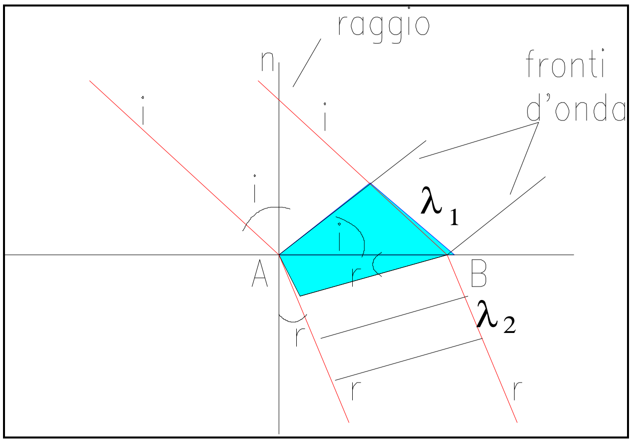
Leggi della Rifrazione



1. **1.** Raggio incidente, raggio rifratto e normale alla superficie di separazione dei due mezzi, appartengono ad uno stesso piano.

2. **2.** L'angolo di incidenza e di rifrazione sono legati dalla relazione: $\frac{sen\hat{i}}{sen\hat{r}} = n_{2,1}$ dove $n_{2,1}$ è l'indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo.
   Se $n_{2,1} > 1 \Rightarrow \hat{i} > \hat{r}$ allora il secondo mezzo è più rifrangente del primo.

Esiste una relazione analoga a quella tra i seni degli angoli tra le due lunghezza d'onda e tra le velocità nei due mezzi.



$$AB sen i = \lambda_1 \qquad \frac{sen\hat{i}}{sen\hat{r}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{2,1}$$
$$AB sen r = \lambda_2$$

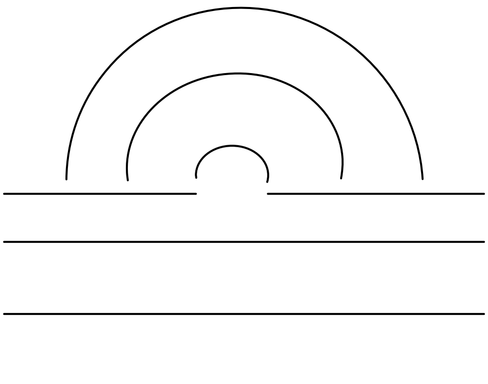
$$\lambda_1 \nu = v_1$$
$$\lambda_2 \nu = v_2$$

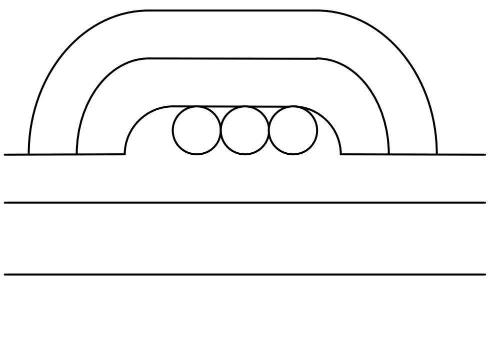
facendo il rapporto si ottiene: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$

La velocità varia nelle stessa proporzione della lunghezza d'onda.

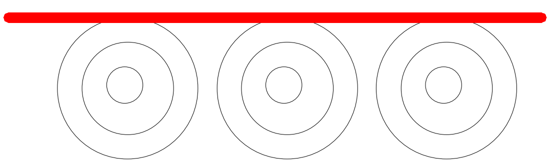
DIFFRAZIONE

Il fenomeno della diffrazione consiste nel fatto che un'onda piana, attraversando una stretta fenditura, origina fronti d'onda circolari, oppure "aggira" gli ostacoli. Il fenomeno è più evidente quando la larghezza della fenditura è paragonabile alla lunghezza d'onda dell'onda stessa. La diffrazione si può spiegare grazie al principio di Huygens.





Principio di Huygens.



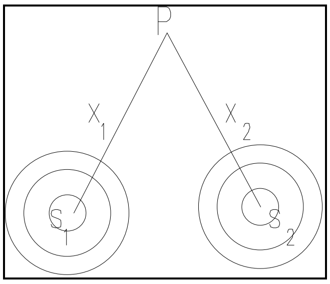
Ogni punto di un fronte d'onda è generatore di microscopiche onde circolari; pertanto i fronti d'onda successivi sono dati dall'inviluppo delle piccole onde circolari relative al fronte precedente.

Principio di sovrapposizione di Fourier

Quando due o più onde attraversano una stessa zona dello spazio, si sovrappongono in modo che l'ampiezza dell'onda risultante è pari alla somma algebrica delle singole ampiezze, in ogni punto e in ogni istante.

INTERFERENZA

E' un fenomeno legato alla sovrapposizione delle onde in una stessa zona del mezzo.
L'interferenza può essere di due tipi: costruttiva o distruttiva. Nel primo caso le ampiezze delle onde si sommano, nel secondo si annullano a vicenda.
Supponiamo che le due onde siano di uguale ampiezza, di uguale lunghezza d'onda e sincrone (differenza di fase nulla).



P è il generico punto di incontro;
x_1 e x_2 sono i cammini delle onde dalla sorgente al punto P.

$$y_1 = Asen2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = Asen2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

$$Y = y_1 + y_2 = A\left[2\cos\left(\frac{-x_1 + x_2}{2\lambda}2\pi\right) \cdot sen2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}\right)\right]$$

$$Y = y_1 + y_2 = 2A\left[\cos 2\pi\left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda}\right) \cdot sen2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}\right)\right]$$

Dell'equazione ottenuta vediamo che l'espressione $sen2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2 + x_1}{2\lambda}\right)$ rappresenta l'equazione d'onda vera e propria contenendo la variabile tempo, mentre l'ampiezza risultante è: $A_r = 2A\cos 2\pi\left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda}\right)$. Tale ampiezza, come si vede, non è più costante ma dipende dalla posizione del punto P rispetto alle due sorgenti.

Interferenza costruttiva

L'interferenza costruttiva si avrà se l'ampiezza risultante è massima in modulo, quindi: $\cos 2\pi\left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda}\right) = \pm 1 \Rightarrow 2\pi\left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda}\right) = k\pi$ quindi $\left|x_2 - x_1\right| = 2k\frac{\lambda}{2}$.

L'equazione trovata rappresenta una famiglia di iperboli di fuochi S_1 ed $S2$, dette <u>linee ventrali</u>.
(Per k = 0 si ha l'asse del segmento S_1 S_2.)
La differenza tra le distanze percorse dalle due onde, perché vi sia interferenza costruttiva, deve quindi essere uguale a un numero pari di mezze lunghezze d'onda cioè a un numero intero di lunghezze d'onda.

Interferenza distruttiva

L'interferenza distruttiva si ha quando l'ampiezza risultante è zero:

$$\cos 2\pi\left(\frac{x_2-x_1}{2\lambda}\right)=0 \Rightarrow 2\pi\left(\frac{x_2-x_1}{2\lambda}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

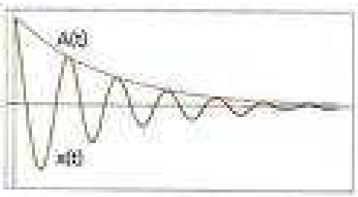
$$2\pi\left(\frac{x_2-x_1}{2\lambda}\right)=\frac{\pi+2k\pi}{2} \Rightarrow \cancel{2}\cancel{\pi}\left(\frac{x_2-x_1}{\cancel{2}\lambda}\right)=\cancel{\pi}\left(\frac{1+2k}{2}\right)$$

Si ricava: $|x_2-x_1|=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$. E' una famiglia di iperboli di fuochi S_1 ed S_2, dette <u>linee nodali</u>.

La differenza tra le distanze percorse dalla due onde, affinché vi sia interferenza distruttiva, deve quindi essere un numero dispari di mezze lunghezze d'onda.
Si può generalizzare il risultato ottenuto al caso in cui la differenza di fase sia costante: la condizione necessaria affinché ci sia interferenza è proprio che la differenza di fase sia costante.

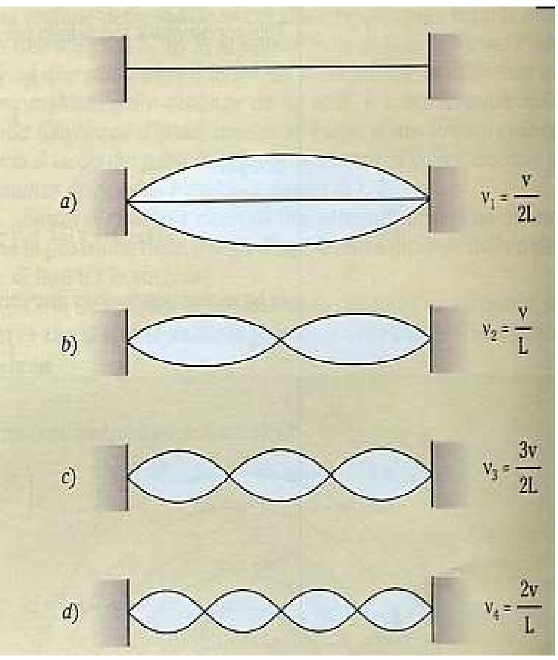
Onde Stazionarie

Per ogni perturbazione in atto in un sistema meccanico è noto che non si riesce ad eliminare la forza di attrito, che dissipa l'energia sotto forma di calore, riducendo gradualmente l'ampiezza dell'oscillazione. Si parla quindi di "oscillazioni smorzate". Se si vuole mantenere costante l'ampiezza della vibrazione si deve fornire al sistema un'energia tale che compensi la perdita dovuta agli attriti; si parla allora di "oscillazione forzata".



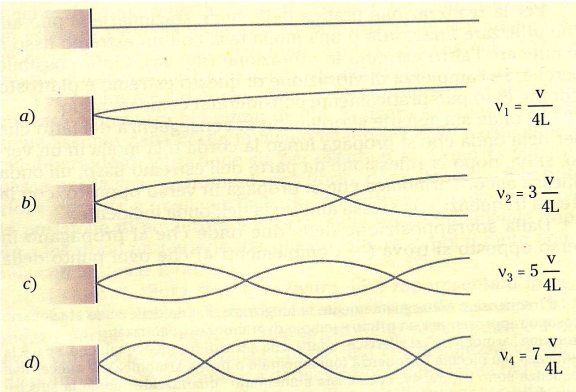
Ogni oscillatore è caratterizzato da frequenze proprie di vibrazione che si calcolano considerando il sistema come sede di "onde stazionarie".
Le onde stazionarie si generano per la sovrapposizione di due onde armoniche di uguale ampiezza e frequenza che si propagano in verso opposto. Caratteristico è l'esempio di un'onda con la sua onda riflessa. Tipico il caso di corde e tubi sonori. Analizziamo due esempi.

Corda fissata ai due estremi



Non si vede oscillare la corda, che sembra invece fissa a forma di fuso. Per questo si parla di onde stazionarie.
Essendo la corda lunga L ed essendo gli estremi due nodi di vibrazione, si ha necessariamente:
$L=n\frac{\lambda}{2};\lambda=\frac{2L}{n}$ e dato che $\lambda\nu=V$, si avrà $\nu=\frac{nV}{2L}$ cioè la corda può vibrare solo per determinate frequenze; ponendo n = 1, 2, 3…, si ottengono le <u>frequenze caratteristiche o frequenze armoniche.</u>
Per n = 1, si ha la <u>prima armonica o frequenza fondamentale.</u>
Poiché per una corda la velocità dell'onda dipende dalla tensione e dalla densità lineare, cioè $V=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, si avrà che la frequenza fondamentale di una corda fissata agli estremi è : $\boxed{\nu=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$.

Corda fissata a un estremo - tubo sonoro



In tal caso ad un estremo ci deve essere un nodo e all’altro estremo un ventre dell’onda; la lunghezza del tubo è multipla di un numero dispari di quarti di lunghezza d’onda:

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \;;\quad L = (2n-1)\frac{V}{4\nu} \;;\; \nu = \frac{(2n-1)V}{4L}$$

Anche in questo caso la corda vibra per determinate frequenze multiple di una fondamentale.
Quanto detto fino ad ora non riguarda solamente il suono e le corde, ma ogni sistema meccanico: ponti, edifici….

Risonanza

Quando dall’esterno applico ad un sistema meccanico un’ impulso di tipo oscillatorio, forzando una certa frequenza, l’ampiezza di vibrazione è piccola se la frequenza forzante è molto diversa dalla frequenza propria del sistema. Se la frequenza imposta dall’esterno è molto vicina o uguale alla frequenza caratteristica, si ottiene una vibrazione di ampiezza elevata. Si dice che il sistema considerato entra in risonanza o vibra “per simpatia”.
Suonando una nota su una corda di una chitarra corrispondente alla fondamentale di un’altra corda, si può osservare che la corda libera inizia a vibrare per simpatia.
La risonanza può avere luogo anche fra oggetti diversi purché vibrino con la stessa frequenza; ad esempio se si fa vibrare un diapason vicino ad un bicchiere contenente acqua, il bicchiere suona e l’intensità del suono si modifica aumentando o diminuendo la quantità di acqua. Quando la colonna d’aria contenuta nel bicchiere è di altezza tale da produrre una frequenza caratteristica uguale a quella del diapason c’è un forte aumento dell’intensità del suono.
Molti strumenti musicali a corde hanno una “cassa armonica o cassa di risonanza” di forma e dimensioni tali da amplificare il suono prodotto dalle corde che sarebbe viceversa molto debole.