

Indicazioni per gli esercizi di geometria analitica nello spazio su rette e piani

Intersezione di due piani

Verifico facilmente se i due piani sono paralleli o coincidenti, osservando i coefficienti. In caso contrario, metto a sistema i due piani e, usando le mosse di Gauss e il teorema di Rouchè Capelli, trovo sicuramente che ci sono ∞^1 soluzioni. Quel sistema rappresenta la retta intersezione dei due piani scritta in forma generale. Se la retta è richiesta in altra forma, ad esempio parametrica, si calcolano i parametri direttori e si procede come dovreste sapere...

Intersezione piano-retta

Il metodo più semplice è scrivere la retta in forma parametrica. Verifico facilmente se la retta è parallela al piano, confrontando i vettori \mathbf{r} e \mathbf{n} . In tal caso posso avere nessuna intersezione o ∞^1 soluzioni se la retta appartiene al piano.

Sostituisco x , y e z , scritti come funzioni di t , nell'equazione del piano. Calcolo t . Se l'equazione è impossibile, la retta è parallela al piano, se è indeterminata ($0 \cdot t = 0$) la retta appartiene al piano.

In tutti gli altri casi trovo un valore di t . Sostituendo questo valore di t in x , y , z trovo il punto intersezione.

[Se la retta è data in forma generale o ridotta, si può anche procedere scrivendo un sistema con le equazioni dei tre piani e studiare il numero di soluzioni col metodo di Gauss e il teorema di Rouchè Capelli].

Intersezione retta-retta

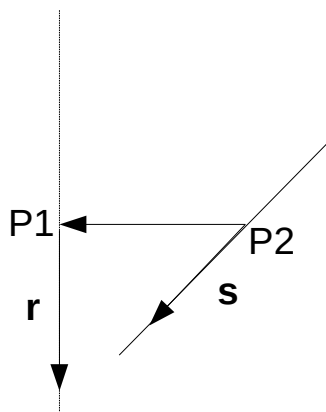
Mi sono stati assegnati o posso calcolare i parametri direttori delle due rette. Vedo facilmente se le rette sono parallele. In tal caso calcolo un punto qualunque di una retta, se appartiene anche all'altra, le rette sono coincidenti.

Se non sono parallele, il metodo più semplice per verificare se sono incidenti o sghembe è scriverne una in forma generale o ridotta e l'altra in forma parametrica. Sostituisco x , y e z , scritti come funzioni di t , nelle equazioni dei due piani che rappresentano la retta in forma generale. Dalla prima equazione trovo un certo valore di t ; se dalla seconda equazione trovo lo stesso valore di t , allora le due rette sono incidenti; sostituendo quel valore di t nella forma parametrica trovo il punto intersezione.

Se invece le due equazioni danno valori diversi di t oppure sono impossibili, allora le rette sono sghembe.

[Si può anche procedere mettendo le due rette in forma generale in sistema; si trova un sistema di 4 equazioni lineari che può essere studiato col metodo di Gauss e il teorema di Rouchè-Capelli].

Distanza di due rette sghembe



La distanza di due rette sghembe è la minima distanza tra un punto P_1 della prima e un punto P_2 della seconda. La minima distanza si ha quando la retta P_1P_2 è ortogonale a entrambe le rette.

- Calcolo le componenti del vettore P_1P_2 , come differenza delle coordinate corrispondenti dei due punti.
- Calcolo le componenti (parametri direttori) dei vettori \mathbf{r} ed \mathbf{s} .
- Scrivo le rette r ed s in forma parametrica con parametri t_1 e t_2 .
- Imposto un sistema con le condizioni di perpendicolarità tra \mathbf{r} e P_1P_2 e tra \mathbf{s} e P_1P_2 (prodotto scalare = 0).
- Dal sistema ricavo t_1 e t_2 . Sostituendo i valori dei due parametri nelle equazioni parametriche delle rette calcolo le coordinate di P_1 e P_2 .

- calcolo la distanza dei due punti utilizzando il teorema di Pitagora nello spazio.
- se richiesto, posso scrivere l'equazione della retta P_1P_2 utilizzando la formula nota.