I TRE PROBLEMI DELLA MATEMATICA GRECA CLASSICA NON RISOLUBILI CON RIGA E COMPASSO

Bibliografia: Courant, Robbins, Che cos'è la matematica, Boringhieri, Torino, 1971
AAVV, La matematica, Vol II, Einaudi, Torino, 2008
http://www.dm.uniba.it

La geometria della Grecia antica si fondava prevalentemente sul concetto di costruibilità di segmenti e figure, dove per costruibilità si intendeva la possibilità di risolvere problemi tracciando le figure cercate con l'utilizzo di una riga e di un compasso ideali.

Un segmento si dice *costruibile con riga e compasso* se è possibile costruirlo con un procedimento che preveda unicamente le seguenti operazioni:

- tracciare rette tra punti dati;
- tracciare circonferenze con un dato centro e passanti per un dato punto;
- intersecare rette;
- intersecare tali rette e tali circonferenze;
- intersecare tali circonferenze.

Ricordiamo in particolare che, con riga e compasso, è possibile costruire

- dato un segmento *AB*, ed una semiretta di estremo *C*, un segmento *CD* sulla semiretta avente la stessa lunghezza di *AB (trasporto di misura)*;
- data una retta ed un punto esterno ad essa, una parallela passante per il punto;
- data una retta ed un punto, una perpendicolare passante per il punto;
- dato un angolo α, ed una semiretta, un angolo, sulla semiretta, uguale ad α.

E' possibile bisecare un segmento e bisecare un angolo con l'uso di riga e compasso.

Def. <u>Si dice che un numero reale è costruibile, se è possibile costruire con riga e compasso un segmento avente lunghezza uguale al numero dato.</u>

(Naturalmente, ciò ha senso solo se si è fissato nel piano un segmento di lunghezza unitaria).

Tre problemi famosi che fecero discutere a lungo i matematici e che furono chiariti completamente solo nell'800 sono:
- la duplicazione del cubo;
- la trisezione dell'angolo;
- la quadratura del cerchio.

Duplicare un cubo significa, dato un cubo di lato unitario, costruire un cubo di volume doppio.
Pertanto se il cubo assegnato ha volume 1, il nuovo cubo dovrebbe avere volume 2 e il suo lato si può trovare risolvendo l'equazione algebrica $x^3 = 2$.

Il problema della trisezione dell'angolo significa dividere un angolo qualsiasi in tre parti uguali.
Vi sono alcuni angoli particolari (90°, 180°) che sono trisecabili con riga e compasso; in generale, però, si dimostra che ciò non è possibile, ad esempio l'angolo di 60° non è trisecabile con riga e compasso. Anche in questo caso si può verificare che l'equazione associata al problema è un'equazione di terzo grado.

Quadrare il cerchio equivale a costruire un quadrato di area pari a quella del cerchio.
Se si assume il cerchio di raggio 1, il lato del quadrato dovrebbe valere $l = \sqrt{\pi}$, il problema è quindi equivalente alla determinazione del numero pi-greco.

NUMERI ALGEBRICI E TRASCENDENTI

I tre problemi greci sono pertanto connessi alla possibilità o meno di trovare soluzione alle equazioni associate all'interno di un determinato campo numerico, quello appunto dei numeri costruibili. Dimostrare la costruibilità con riga e compasso è quindi questione trasferibile all'ambito dell'algebra, in particolare allo studio delle caratteristiche dei numeri che risolvono tali equazioni.

Dando per noto cosa si intenda per numero razionale e numero irrazionale (numero non esprimibile in forma di frazione, cioè come rapporto tra grandezze "commensurabili"), vediamo ora cosa si intende per *numero algebrico* e per *numero trascendente*.

Def. Un numero si dice algebrico (reale o complesso) se è soluzione di una equazione algebrica di grado n a coefficienti interi (o equivalentemente a coefficienti razionali).
Qualsiasi numero che non sia algebrico è detto trascendente.

E' stato definito precedentemente cosa si intenda per numero costruibile.
E' stato dimostrato che ogni numero costruibile è algebrico, ma non tutti i numeri algebrici sono costruibili.

L'insieme dei numeri razionali dotato delle operazioni di somma e prodotto è un "campo".

(Il campo è una struttura algebrica tale che l'insieme dato, con le due operazioni prese separatamente, forma gruppo commutativo e le due operazioni sono legate tra di loro dalla proprietà distributiva)

Si possono ottenere i numeri detti costruibili estendendo il campo dei numeri razionali con l'aggiunta di numeri irrazionali espressi da radici quadrate, anche composte.
Ad esempio, numeri del tipo: $p+\sqrt{q}$ oppure $a+\sqrt{p+\sqrt{q}}$, dove a, p, q sono razionali, sono numeri costruibili. Ciò è espresso in modo equivalente dal seguente

Teorema: un numero è costruibile solo se il grado del polinomio minimo di cui esso è radice è una potenza del 2.

Il numero $\sqrt{2}$ è un numero algebrico costruibile. Esso infatti è soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado $x^2=2$. D'altronde, partendo da un segmento unitario, in base alle possibili operazioni su elencate, è facile verificare come sia possibile tracciare la diagonale del quadrato di lato 1, che ha appunto lunghezza $\sqrt{2}$.
(Esercizio: Scrivi un'equazione algebrica a coefficienti interi che dia come soluzione i numeri costruibili: $2+\sqrt{3};\sqrt{1+\sqrt{2}}$ *)*

Il numero $\sqrt[3]{2}$ è un numero algebrico non costruibile essendo radice dell'equazione di terzo grado $x^3=2$. Per questo la duplicazione del cubo è problema non risolubile con riga e compasso.
Per lo stesso motivo non è possibile trisecare l'angolo essendo tale problema riconducibile ad una equazione di terzo grado.
Il problema della quadratura del cerchio (e rettificazione della circonferenza) è legato al numero pi-greco; fu dimostrato solo nel 1761 da Lambert che π è un numero irrazionale e nel 1882 da Lindemann che è numero trascendente (Lindemann estese a tale scopo la tecnica utilizzata da Hermite per dimostrare la trascendenza di **e**, costante di Nepero).
Essendo trascendente, pi greco non è algebrico e, di conseguenza, non è costruibile, poiché ogni numero costruibile è algebrico.

RETTIFICAZIONE DELLA CIRCONFERENZA E QUADRATURA DEL CERCHIO

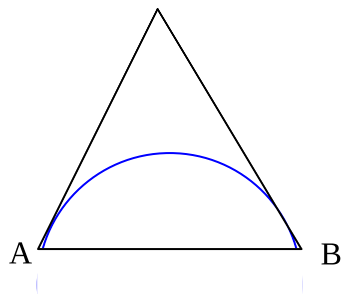
Tra i tre problemi su elencati, sicuramente quello che ha più affascinato i matematici nel corso dei secoli è la quadratura del cerchio; per la determinazione sempre più precisa di pi greco e delle sue proprietà sono state utilizzate numerose tecniche di trattazione (serie di potenze, frazioni continue, integrali…).
E' storicamente importante l'approccio di Archimede (287-212 a.C.), trattandosi di metodo estremamente moderno e geniale, che fu ripreso quasi duemila anni più tardi quando nacque il calcolo integrale.

<u>Rettificare la circonferenza significa determinare un segmento lungo come la circonferenza, in altri termini determinare la lunghezza della circonferenza trovando il numero che misuri tale lunghezza.</u>

Archimede opera premettendo due postulati (affermazioni date cioè per evidenti):

- *Primo postulato*

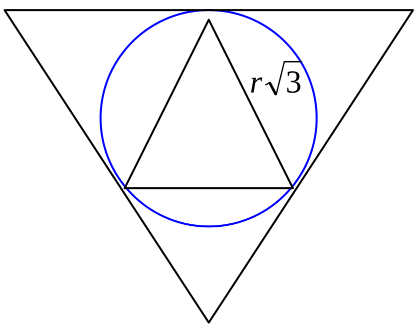
La lunghezza di ogni arco AB di circonferenza è maggiore della lunghezza della corda AB corrispondente.



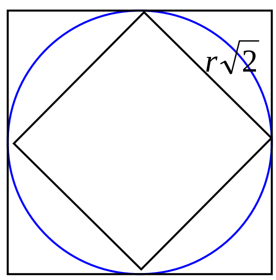
- *Secondo postulato*

La lunghezza di ogni arco AB di circonferenza è minore della somma delle lunghezze dei due segmenti di tangente condotti nel punto A e nel punto B.

Considerato un cerchio di raggio r, si costruiscono i poligoni regolari inscritti e circoscritti. Per i postulati precedenti la lunghezza della circonferenza sarà sempre compresa tra il perimetro del poligono inscritto e del corrispondente poligono circoscritto: $p_n < C < P_n$.
Calcoliamo le lunghezze dei perimetri per n = 3 e n = 4.



Nel caso del triangolo equilatero è facile verificare che $p_3 = 3\sqrt{3}r$ e $P_3 = 6\sqrt{3}r$.



Nel caso del quadrato è facile verificare che $p_4 = 4\sqrt{2}r$ e $P_4 = 8r$.

I perimetri sono sempre proporzionali al raggio (o equivalentemente al diametro). La lunghezza della circonferenza sarà anch'essa proporzionale al raggio.
Aumentando il numero dei lati, il perimetro inscritto cresce e il perimetro circoscritto decresce, avvicinandosi entrambi alla lunghezza della circonferenza; le due successioni cioè approssimano per difetto e per eccesso la circonferenza.
In termini moderni si dice che le due classi numeriche monotone date dai perimetri inscritti e dai perimetri circoscritti sono due *classi contigue*.

Def. Due classi numeriche sono contigue se:

- sono separate: $p_n < P_n, \forall n$
- godono della proprietà dell'avvicinamento indefinito:

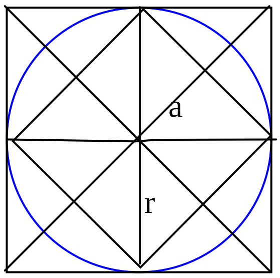
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \big| \forall n > N, P_n - p_n < \varepsilon$.

Ciò significa che è possibile rendere piccola a piacere la differenza tra il perimetro circoscritto e quello inscritto; esisterà un numero N di lati sufficientemente grande da realizzare la condizione richiesta.
Secondo il teorema di Cantor, due classi contigue ammettono un unico elemento di separazione che, in questo caso, è per definizione la lunghezza della circonferenza.
Indicata la lunghezza della circonferenza come $C = 2\pi r$, si potrà analogamente definire il numero π come elemento di separazione di due classi numeriche, ottenute dividendo i perimetri per il diametro.
Il problema della rettificazione equivale pertanto alla determinazione del numero pi greco.
Archimede calcolò le lunghezze dei perimetri di poligoni fino a 96 lati e pervenne alla relazione:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \quad \text{cioè} \quad 3{,}1408... < \pi < 3{,}1428\ldots$$

Tale limitazione è assolutamente corretta e consente di fissare esattamente le prime due cifre decimali: π = 3,14...
Il valore oggi ottenuto è 3,14159265358979…
Si tratta comunque di un'ottima approssimazione.

Il problema della quadratura del cerchio significa determinare un quadrato di area pari al cerchio, in altri termini determinare il numero che esprime l'area del cerchio.
Archimede procede in modo analogo utilizzando ancora le successioni di poligoni inscritti e circoscritti. L'area del cerchio sarà l'elemento di separazione tra le classi delle aree inscritte e delle aree circoscritte: $s_n < A < S_n$.
Teorema: L'area del cerchio è uguale all'area di un triangolo avente come base la circonferenza e come altezza il raggio.
Dimostrazione
Dividendo i poligoni inscritti e circoscritti in opportuni triangoli aventi come basi i lati si può vedere che:



$s_n = \frac{1}{2} p_n a_n$ dove *a* indica l'apotema e $S_n = \frac{1}{2} P_n r$.

Quindi: $\frac{1}{2} p_n a_n < A < \frac{1}{2} P_n r$.

Aumentando il numero dei lati e facendolo tendere all'infinito, la lunghezza dell'apotema tende a diventare uguale al raggio, i perimetri, come visto, tendono alla lunghezza della circonferenza. Si ottiene: $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r < A < \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$. Da cui: $A = \pi r^2$.
Anche in questo caso la determinazione dell'area equivale alla determinazione di π; il lato del quadrato equivalente al cerchio è $l = \sqrt{\pi}\, r$.
Avendo dimostrato Lambert l'irrazionalità di π, si ebbe la certezza che circonferenza e raggio non sono commensurabili e che la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio non possono essere espressi in modo esatto con un' espressione decimale, che è invece necessariamente approssimata. Avendo provato Lindemann la trascendenza di pi greco, si ebbe la dimostrazione che la quadratura del cerchio non è problema risolubile con riga e compasso.