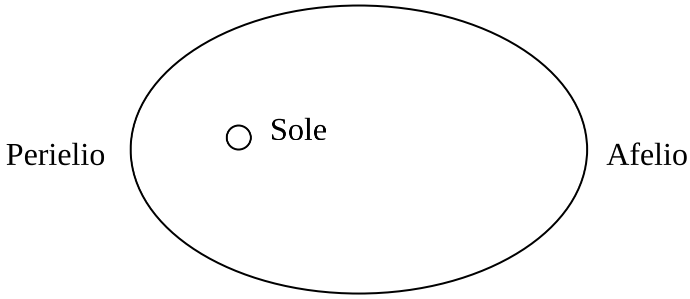
TEORIA DELLA GRAVITAZIONE

LEGGI DI KEPLERO

Dopo la rivoluzionaria teoria eliocentrica del monaco polacco Copernico, Giovanni Keplero formulò tre leggi a correggere e migliorare ulteriormente il modello copernicano.
Egli è infatti il primo a formulare una teoria eliocentrica in cui le orbite dei pianeti non sono circolari ma lievemente ellittiche.
L'enunciato delle tre leggi di Keplero è:

1. **Le orbite dei pianeti sono ellittiche e il sole occupa uno dei due fuochi.**

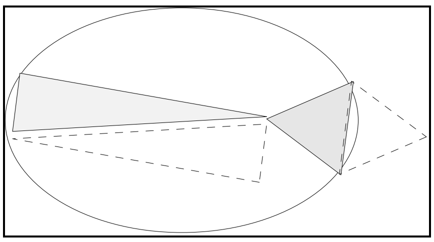


2. **Il raggio vettore che unisce il sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali. Analogamente la velocità areale è costante.**

Si può dimostrare la legge utilizzando il principio di conservazione del momento angolare. Trattandosi di un sistema di forze centrali, tali cioè per cui $\vec{r} \wedge \vec{F} = 0$ in ogni punto, il momento angolare si conserva. Infatti:

$\vec{M}_f = \dfrac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$ (il momento della forza è uguale alla variazione del momento angolare nel tempo).

Se $\vec{M} = 0$ $\Delta \vec{L} = 0$ quindi $L = \cos t$.



Si avrà allora che, considerate due posizioni qualsiasi sull'orbita, $L_1 = L_2$, cioè:
$m\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 = m\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2$.

Se moltiplichiamo per Δt avremo: $\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 \Delta t = \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 \Delta t$ e, dato che $v \cdot \Delta t = s$, allora:

$\vec{r}_1 \wedge \vec{s}_1 = \vec{r}_2 \wedge \vec{s}_2$

$\dfrac{1}{2}\left|\vec{r}_1 \wedge \vec{s}_1\right| = \dfrac{1}{2}\left|\vec{r}_2 \wedge \vec{s}_2\right|$

$A_1 = A_2$

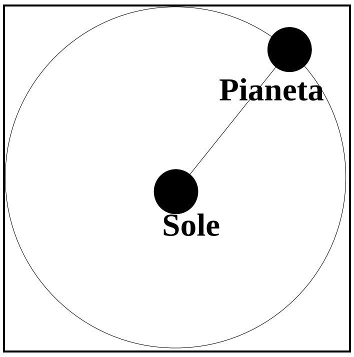
<u>Aree percorse in tempi uguali sono uguali.</u>

3. **I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite.**

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

LEGGE DELLA GRAVITAZIONE UNIVERSALE DI NEWTON

Consideriamo per semplicità circolare l'orbita di un pianeta P intorno al sole.



La forza che tiene il pianeta sulla sua orbita è una forza centripeta:

$F_c = ma_c$ dove $a_c = \omega^2 r$, pertanto

$F_c = m\omega^2 r$.

Ricordando che la velocità angolare è $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e sostituendo avremo:

$$F = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

Ma, secondo la terza legge di Keplero, $\frac{T^2}{r^3} = K$, cioè: $T^2 = Kr^3$.

allora $F = m\frac{4\pi^2}{Kr^{\cancel{3}2}}\cancel{r}$.

$4\pi^2$ e K sono costanti; quindi $F = C\frac{m}{r^2}$, dove C è una costante.

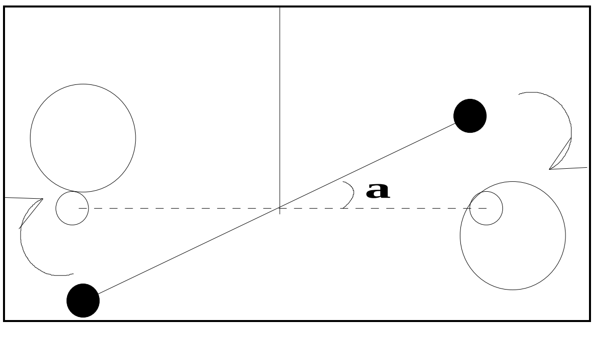
Da qui deduciamo che la forza di gravità deve essere direttamente proporzionale alla massa e inversamente proporzionale al quadrato del raggio. Per il principio di azione e reazione questa forza deve essere la stessa anche considerando la forza di attrazione della terra agente sul Sole. $F = C_1\frac{M_s}{r^2}$, quindi la forza è proporzionale anche alla massa del Sole.

La forza di interazione gravitazionale è allora: $F = G\frac{Mm}{r^2}$.

<u>La forza di gravità agisce lungo la congiungente le due masse, è proporzionale alle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i loro baricentri.</u>

G è la costante di gravitazione universale, fu determinata da Cavendish e vale $6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg}$.

PESATA DELLA TERRA – BILANCIA DI CAVENDISH



Le masse M e m si attraggono reciprocamente con la stessa forza: $F = G\frac{Mm}{r^2}$. Si crea una coppia di forze

Il sistema gira ma il filo si oppone alla rotazione; il momento di torsione elastica è $M_T = K\alpha$.

Ad un certo punto il momento di torsione e il momento della coppia di forze gravitazionali si eguagliano, il sistema è in equilibrio.

Misuro l'angolo α corrispondente alla situazione di equilibrio ed eguagliando i due momenti posso ricavare gli elementi incogniti:

$K\alpha = G\frac{Mm}{r^2}\cdot braccio$. Da qui si può ricavare il valore di G e, di conseguenza, la massa della terra.

$$P = mg$$

$$P = G\frac{M_T\cancel{m}}{R_T^2} = \cancel{m}g$$

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

La forza peso sulla Terra corrisponde alla forza di attrazione gravitazionale tra la massa del corpo e la massa della Terra.

L'accelerazione di gravità sulla terra è espressa da questa formula.

Nota g, noto R (misurato già da Eratostene intorno al 200 a.C.), misurata G, si può calcolare la massa della Terra, che risulta circa $10^{24}\,kg$.

CONCETTO DI CAMPO e CAMPO GRAVITAZIONALE

Il concetto di campo fu elaborato da Faraday e Maxwell nella seconda metà del 1800 in relazione agli studi sull’elettromagnetismo, quando si trovò che le forze elettriche si comportavano come quelle gravitazionali, agivano cioè a distanza.
Newton non aveva fatto ipotesi per risolvere il problema dell’azione a distanza, su cui pure si interrogava.
Per secoli si continuò ad ipotizzare l’esistenza di un etere, strana sostanza con proprietà contraddittorie che avrebbe dovuto trasportare l’impulso della forza gravitazionale e le onde luminose.
Il concetto di campo è fondamentale in tutta la fisica contemporanea, elimina il problema dell’azione a distanza sostituendo al vuoto interposto tra i corpi l’idea di un ente fisico continuo che permea lo spazio ed è reale, nel senso che trasporta energia e quantità di moto.
Pertanto l’azione tra masse e cariche non è istantanea ma viene trasmessa da punto a punto vicino, da istante a istante vicino in modo continuo dal campo.

CAMPO GRAVITAZIONALE GENERATO DA UNA SOLA MASSA

Per verificare l’esistenza del campo gravitazionale utilizzo una massa di prova. La massa subisce una forza F diretta verso il centro. In ogni punto potrei rappresentare il campo con un vettore.
Definisco in modo operativo “campo gravitazionale **g”** il rapporto tra la forza gravitazionale e la massa su cui agisce:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Il campo gravitazionale è quindi la forza gravitazionale agente per unità di massa. Si misura in $\frac{m}{s^2}$, ha le dimensioni di una accelerazione.
Se M è la massa che genera il campo:

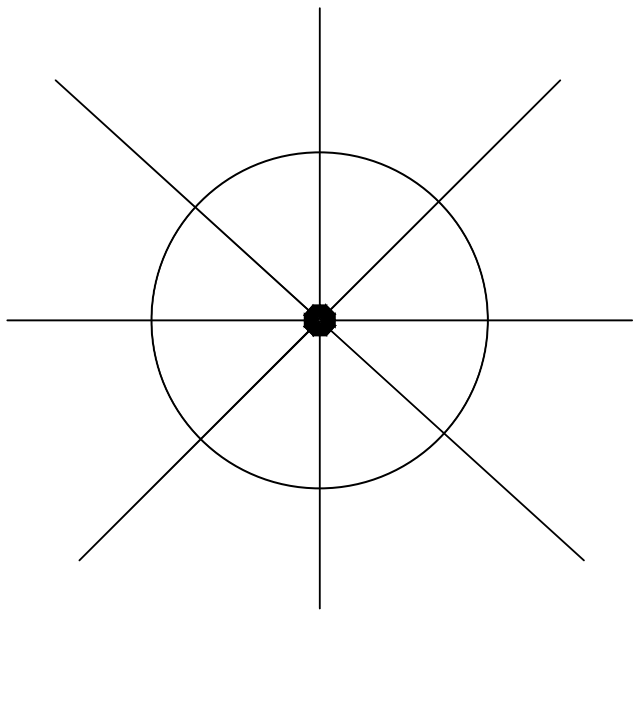
$$g = \frac{G\frac{M\cancel{m}}{r^2}}{\cancel{m}} = \frac{GM}{r^2}$$

se il corpo è sulla superficie della terra:

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2},$$

accelerazione di gravità e campo gravitazionale coincidono.

Ad una quota h, $g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$.



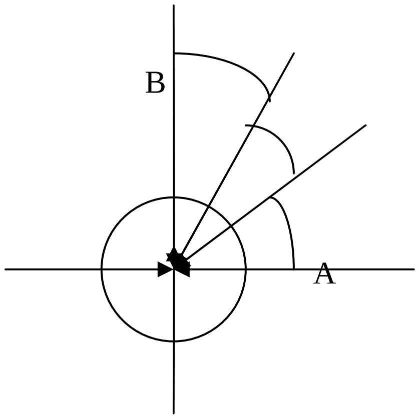
Le linee del campo o linee di forza sono linee tangenti in ogni punto al vettore campo, nel nostro caso sono semirette orientate verso il centro della terra.

LAVORO NEL CAMPO GRAVITAZIONALE

Ipotizzo di spostare una massa m da un punto A a un punto B del campo e calcolo il lavoro svolto dalla (o contro la) forza gravitazionale..
Gli unici pezzi di tragitto che contribuiscono al lavoro sono quelli radiali, in quanto sugli archi di circonferenza forza e spostamento sono perpendicolari.
In definitiva lo spostamento utile per il calcolo del lavoro è: $s = M_B - M_A$.

La forza in A è $F_A = G\dfrac{Mm}{r_A^2}$

La forza in B è $F_B = G\dfrac{Mm}{r_B^2}$



Devo utilizzare un valore medio della forza, considero la media geometrica, che è la radice del prodotto $F = \sqrt{F_A \cdot F_B} = G\dfrac{Mm}{r_A r_B}$

quindi il lavoro sarà:

$$L = G\frac{Mm}{r_A r_B}(r_B - r_A) \quad \text{cioè } L = \left(G\frac{Mm}{r_A} - G\frac{Mm}{r_B}\right) = U_B - U_A.$$

il lavoro è la differenza tra l'energia potenziale gravitazionale nel punto B e l'energia potenziale gravitazionale nel punto A.

L'energia gravitazionale in un punto è definita a meno di una costante $U = -G\dfrac{Mm}{r} + c$; è però lecito ipotizzare che, a distanza infinita dalla massa M, la forza e l'energia gravitazionale tendano a zero: $U \to 0$ per $r \to \infty$. Quindi: $0 = -G\dfrac{Mm}{\infty} + c$ che implica $c = 0$.

Pertanto l'energia gravitazionale in un punto è data da $U = -G\dfrac{Mm}{r}$; l'energia potenziale gravitazionale è negativa. Tende a zero all'infinito e tende a - ∞ avvicinandosi al centro della terra.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEL CAMPO GRAVITAZIONALE

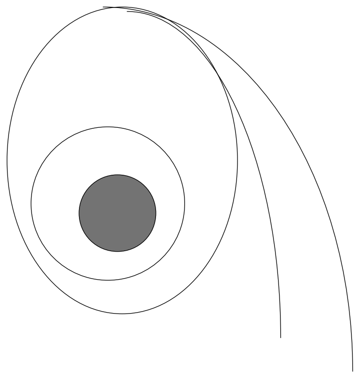
$L = \dfrac{1}{2}mv_A^2 - \dfrac{1}{2}mv_B^2 = E_A - E_B$ (teorema dell'energia cinetica)

$$L = -\frac{GMm}{r_B} + \frac{GMm}{r_A} = U_B - U_A$$

Uguagliando le due espressioni del lavoro, si trova che la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale è costante in ogni punto, essendo A e B scelti a caso:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \cos t.$$

MOTO DEI SATELLITI



Principio di conservazione dell'energia
nel campo gravitazionale terrestre

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \cos t$$

Se lancio una massa dalla terra, questa potrà percorrere traiettorie diverse a seconda della velocità impressa cioè dell'energia iniziale. Potrà fare orbite chiuse (ellissi, circonferenze) che potranno intersecare o meno la terra, a seconda che il corpo ricada o stia in orbita. Saranno orbite aperte (parabole, iperboli) se il corpo sfugge al campo gravitazionale e non torna indietro.

ORBITA CIRCOLARE

La forza centripeta coincide con la forza di gravità

$$m\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

ottengo un altro modo per esprimere l'energia cinetica.

Applico il principio della conservazione dell'energia $E_{tot} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} - G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{r} < 0$.

Per un'orbita circolare l'energia totale è negativa. Questo risultato può essere generalizzato a tutte le orbite chiuse. Significa che non ho dato abbastanza energia al corpo per portarlo verso ∞. Vince l'energia gravitazionale e quindi $\mathrm{E_{tot}} < 0$.

ORBITE APERTE

Poiché in questo caso la massa raggiunge il punto all'infinito, si ha che in quel punto l'energia gravitazionale è zero e quindi l'energia totale è:

$$E_\infty = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \geq 0$$

L'energia totale, per il principio di conservazione, è sempre maggiore o uguale a zero in ogni punto.

$E_{tot} = 0 \rightarrow v_\infty = 0$ corrisponde all'orbita parabolica.

$E_{tot} > 0 \rightarrow v_\infty \neq 0$ corrisponde all'orbita iperbolica.

PRIMA VELOCITÀ COSMICA

La prima velocità cosmica è quella che possiede un satellite in grado di orbitare intorno alla terra su un'orbita di raggio uguale a quello della terra. Uguaglio ancora forza di gravità e forza centripeta:

$$\frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{R}} = \frac{GM_T\cancel{m}}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

la velocità è di 7,9 km/s.

SECONDA VELOCITÀ COSMICA O VELOCITA' DI FUGA

È la minima velocità necessaria affinché l'oggetto non torni indietro e vada fino all'infinito. Per questo è detta velocità di fuga.

Corrisponde all'orbita parabolica, prima orbita aperta, in cui E tot = 0.

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{GM_T\cancel{m}}{R^2} = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$$

la velocità è di 11,2 km/s.

SATELLITE GEOSTAZIONARIO O SINCRONO

Un satellite è geostazionario se orbita intorno alla terra con lo stesso periodo di rotazione della terra.
In tal modo può stare sempre sulla verticale dello stesso luogo sulla superficie terrestre.
Vogliamo calcolare che velocità deve avere e a che altitudine deve stare.
Uguagliamo la forza centripeta e la forza di gravità:

$$\frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{R+h}} = \frac{GM\cancel{m}}{(R+h)^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

otteniamo:

La velocità nel moto circolare era $v = \frac{2\pi(R+h)}{T}$

Uguaglio le due espressioni per la velocità: $\frac{2\pi(R+h)}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

Trovo : $\frac{4\pi^2(R+h)^2}{T^2} = \frac{GM}{R+h}$

(si ricava per inciso verifica della terza legge di Keplero $\frac{(R+h)^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$)

Sapendo che T = 86400 s, ricavo $(R+h)^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2$; l'altitudine h è allora circa 36000 chilometri.

Posso sostituire il dato nella formula e ottengo v = 3 km/s.