16) Dato il punto $P(t^2, t^3, t^2+t)$, trovare la proiezione ortogonale H di P sul piano di equazione $x-2y+z=0$. Per quali valori di t il punto P coincide con H?

17) Determinare l'angolo che la retta r di equazioni $(x-1)/3 = 2y = (1-3z)/2$ forma con una retta s parallela al piano (x, y) e al piano π di equazione $x-2y+z-1=0$.

18) Dati i punti $A(1,0,1)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,0,h)$, scrivere l'equazione del piano π che essi determinano e verificare che essa è soddisfatta dalle coordinate del quarto vertice D del parallelogrammo che ha i segmenti AB e BC come lati consecutivi. Verificare poi che π varia in un fascio F e che D varia su una retta r e determinare l'angolo tra l'asse s del fascio e la retta r.

19) Scrivere l'equazione del piano π passante per i punti $A(t,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,-t)$: determinare t in modo che il piano ABC risulti equidistante dai punti $M(2,3,-2)$ ed $N(0,-1,3)$ e calcolare il coseno dell'angolo formato dai piani trovati.

20) Verificare che le rette

$$a: \begin{cases} x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases} \quad , \quad b: \begin{cases} x=2t \\ y=3+2t \\ z=4 \end{cases}$$

sono parallele e scrivere le equazioni della retta m per $P(3,4,5)$ perpendicolare al loro piano.

21) Scrivere le equazioni della retta s passante per $P(0,h,k)$ e incidente le rette a: $x-2=y-2=0$ e b: $x-3=z-1=0$. Per quali valori di h e di k la retta s è perpendicolare ad entrambe le rette a e b?

22) Nello spazio, riferito a una terna di assi cartesiani ortogonali monometrici, date le rette r: $x-y+1=0$, $y+2z-2=0$ ed s: $x-a=y=z$, determinare la retta n perpendicolare ed incidente ad entrambe: trovare poi a in modo che la perpendicolare suddetta incontri l'asse x.

23) a) Trovare le equazioni dei piani π_1 e π_2 passanti per $P(1,0,0)$, paralleli al vettore $\mathbf{u}(1,1,1)$ ed equidistanti dai punti $A(1,1,-2)$ e $B(3,3,-4)$.

b) Dati inoltre $A'(0,0,-7)$ e la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-4+3t \end{cases}$$

determinare su r il punto B' in modo tale che, sostituita la coppia A', B' alla data coppia A, B, si trovino gli stessi piani precedentemente richiesti.

24) Nello spazio, riferito a una terna di assi cartesiani ortogonali monometrici, determinare le sfere S_i tangenti al piano di equazione $2x + y - 2z - 6 = 0$ nel punto $P(2,2,0)$ e tangenti alla retta $r: x + z + 2 = y - 2 = 0$ e trovare i rispettivi punti di contatto con r.

25) Determinare la sfera S avente il centro sulla retta $m: x - 1 = y - 2 = 0$ e tangente ai piani $\pi: 2x - y + z - 4 = 0$ e $\pi': 2x - y + z + 2 = 0$.

26) Trovare le equazioni delle sfere tangenti al piano $x - y + 2z - 1 = 0$ in $P(1,0,0)$ e tangenti all'asse z.

27) Scrivere le equazioni dei piani passanti per l'asse delle y e tangenti alla sfera S di equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4z + 4 = 0.$$

28) Nello spazio, riferito a una terna di assi cartesiani ortogonali monometrici, determinare i piani passanti per la retta $r: x = y = 1 - 2z$ e tangenti alla sfera $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z + 5/4 = 0$.

29) Determinare i piani per la retta $x - 1 = y = z$ e secanti la sfera $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z + 10 = 0$ secondo circonferenze di raggio $r = 1$.

30) Determinare i piani tangenti alla sfera S di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ paralleli alle rette $r: x - y - 1 = x - z - 2 = 0$ ed $s: 2x + z - 1 = y - 3z - 1 = 0$. Trovare poi la sfera S' concentrica con S e tangente ad r, il punto di contatto T tra S' ed r e determinare la posizione di S' rispetto a S.

31) Determinare le rette passanti per $V(0,0,0)$, appartenenti al piano $y + z = 0$ e tangenti alla superficie sferica: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3 = 0$.

32) Determinare il luogo L dei centri delle sfere di raggio 4, tangenti alla retta $2x = y = 2z$ nel punto $A(1,2,1)$.

33) Scrivere l'equazione del luogo L delle rette uscenti dal punto $V(0,1,4)$ e formanti un angolo di 30° col piano $z = 2$.

34) Determinare l'equazione del luogo C delle rette passanti per $V(2, 0, 0)$ e tangenti alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

35) Verificare che le rette:

$$a: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad b: \begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

sono parallele e scrivere l'equazione del cilindro Q generato dalla rotazione della retta b attorno alla retta a.

36) Dati i fasci di piani:

$$F : x + ky - 1 - 4k = 0$$
$$F' : x + k'y + 1 + 4k' = 0$$

verificare che i rispettivi assi sono paralleli. Scrivere poi l'equazione del luogo L delle rette intersezione del generico piano di F col piano di F' ad esso perpendicolare e verificare che L è un cilindro rotondo avente come asse l'asse z.

37) Determinare il luogo L dei punti aventi distanza 1 (uno) dalla retta di equazioni $x = y = 2z$.

38) Scrivere le equazioni della retta a simmetrica dell'asse z rispetto al piano $3x - y + z = 0$ e trovare l'equazione della superficie S generata dalla rotazione della retta a intorno all'asse z.

39) Determinare la superficie S generata dalla rotazione dell'asse z attorno alla retta a: $x = y = z$ e verificare che è un cono con vertice nell'origine.

0) Considera i punti: O(0, 0, 0), A(1, 2, 3), B(- 4, 6, 4). Determina il punto C che forma con essi il parallelogrammo OABC e calcola gli angoli del parallelogrammo.
Determina l'equazione del piano su cui giace il parallelogrammo.
Detto D il centro del parallelogrammo, scrivi l'equazione della retta passante per D perpendicolare al piano del parallelogrammo.

1) Determina l'equazione del piano π passante per il punto A(1, 1, 1) e per la retta r: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

2) Verifica che il piano π : x – 2y + 3 z = 11 e la retta r $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$

sono incidenti e determina il punto di incidenza. Calcola l'angolo formato dalla retta con il piano.

3) Scrivi l'equazione della retta parallela al piano (x,y), parallela al piano x – y = 0 e passante per il punto P(3,1,4).

4) Determina l'intersezione dei tre piani nei due casi:

a) x – y = 2, y = 2, x – y + z = 2

b) x – y = 2, x – y + z = 2, x – y + 2z = 2

5) Determina la distanza della retta r dall'origine degli assi. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Scrivi l'equazione della superficie sferica di centro l'origine tangente alla retta.
Determina l'equazione del piano passante per r e tangente alla sfera.

6) Verifica che le rette r ed s sono sghembe e calcolane la distanza:

r $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ s $\begin{cases} x = k \\ y = 2 - k \\ z = 3k \end{cases}$

7) Scrivi l'equazione della superficie conica di semi-apertura 60°, di asse y e vertice V (0,0,0).
Determina poi l'equazione del cono ottenuto traslando il precedente in modo che il vertice diventi V'(2, 3, -1).

8) Classifica le quadriche:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1 \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - z = 1 \qquad x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0 \qquad x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{9} = 1$$

1)
a. Dati i piani α: $x - y + 2z = 3$ e β: $2x + y - z = 1$, trova l'equazione parametrica della retta r parallela ad α e β passante per P (2,3,1).
b. Scrivi la retta r anche in forma frazionaria e in forma generale
c. Trova la retta s data dall'intersezione di α e β e verifica che è parallela ad r.
d. calcola la distanza tra r ed s.

2)
Date le rette r: $x - z - 1 = 2y + z - 2 = 0$ ed s : $x - 1 = y - 2 = 0$, verifica che sono sghembe e calcola la loro distanza.

3)
Dato il piano π: $x - 2y + z = 0$, determina l'equazione della superficie sferica di raggio $\sqrt{6}$ tangente il piano π e avente il centro sulla retta r:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

determina poi il punto di tangenza T tra sfera e piano.

4) Scrivi l'equazione di un cono di vertice (0,0,0), asse z e semiapertura 45°.
Verifica che tagliando il cono
-con un piano ortogonale all'asse z, si ottiene una circonferenza.
Determina quale tra questi piani genera sul cono una circonferenza di raggio 3.
-con un piano ortogonale all'asse x, oppure ortogonale all'asse y, o con un piano qualunque parallelo all'asse z si ottiene …….

BONUS: tagliando il cono dell'ex.4 con un piano parallelo alla generatrice del cono si ottiene….
[per scrivere un piano parallelo alla generatrice, osserva la sezione del cono ad esempio sul piano (y,z) e scrivi il vettore normale al piano che vorresti trovare. Il termine noto sarà un numero qualunque diverso da 0.]

5) Riconosci le quadriche aiutandoti con le intersezioni con piani particolari:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1 \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{(z-2)^2}{16} = 1 \qquad x - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 0$$

Geometria analitica nello spazio

5. Dati i punti $A(-2, 3, 1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(2, 2, -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:
$x + 2y - z + 1 = 0$ nel suo punto P di coordinate $(1, 0, 2)$.

6. Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta r: $x = y = z = t$ tangente al piano $\pi : 3x - y - 2z +14 = 0$ nel punto $T(-4, 0, 1)$

9. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3,1,0)$, $B(3,-1,2)$, $C(1,1,2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che ABCP sia un tetraedro regolare.

5. Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2, -1, 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

9. Date le rette: $x = t; y = 2t; z = t$ e $x + y + z - 3 = 2x - y = 0$ e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

5. Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z= 0$.
- Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ e la superficie S sono secanti.
- Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S.

7) Una sfera, il cui centro è il punto $K(1, 0, 1)$, è tangente al piano Π avente equazione
$x - 2y + z + 1 = 0$.
Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Esercizi di geometria analitica nello spazio: rette e piani

1) Date le rette: $r: x - y = 2x - z + 5 = 0$, $s: x - y - 6 = x - 2y + z - 6 = 0$ e $t: 3x - 2z + 2 = 3y + z - 4 = 0$,
scrivere le equazioni della retta l incidente r ed s e parallela a t.

2) Dati i piani:
$\pi 1: x + y + z - 1 = 0$, $\pi 2: x + ky = 0$, $\pi 3: x + y - z - 1 = 0$,

i) studiare, al variare di k in campo reale, la loro posizione reciproca.
ii) Posto $k = -1$, si consideri la retta $r = \pi 1 \cap \pi 2$.
Determinare le equazioni della retta s, simmetrica di r rispetto al piano $\pi 3$, e scrivere l'equazione del piano che contiene r ed s.

3) Dati il punto A(3, -3, 1) e le rette:

$$r \quad \begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ed } s \quad \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

determinare l'equazione del piano passante per A e parallelo ad r ed s.

4) Date le rette: $r: x - 2 = y - 5 = 0$ ed s: passante per l'origine, parallela al piano: $3x + 2y + z + 5 = 0$ e complanare con la retta di equazioni: $x - y + z = y - 3 = 0$, verificare che r e s sono sghembe e determinare la loro minima distanza.

5) Dati il piano π: $x - y + hz - 1 = 0$ e la retta r: $x - hz - 2 = 3x + y = 0$

i) stabilire per quali valori di h:
a) la retta ed il piano sono incidenti;
b) la retta è parallela al piano;
c) la retta è contenuta nel piano;
d) la retta ed il piano sono perpendicolari.

ii) Si ponga $h = 1$ e si considerino i punti $A = (2, 1, 0)$ e $B = (0, 2, 2)$.
Si verifichi che le rette s, passante per A e perpendicolare a π, e t, passante per B e parallela a r, sono sghembe.

6) Si determini il piano π contenente la retta r:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

e passante per l'origine.

7) Determinare l'equazione del piano passante per il punto $A = (2, -3, 0)$, parallelo alla retta $r: x = y = -z$ e perpendicolare al piano $\pi: x + y + z = 2$.

8) Nello spazio vettoriale reale V_3, rispetto ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, sono dati i vettori:
$\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (3, 1, 0)$.
i) Determinare, se esiste, un vettore **x** di V_3 tale che: **x** sia ortogonale a **u**, **x** sia complanare a **u** e a **v**, la proiezione ortogonale di **x** su **w** sia $-2\,\mathbf{w}$.
ii) Determinare le equazioni delle rette a e b tali che:
a passa per il punto $A = (0, 1, -1)$ ed è parallela al vettore **u**,
b passa per il punto $B = (-3, 0, 2)$, è complanare ad a ed è ortogonale a **v**.
iii) Calcolare la distanza dell'origine dalla retta a.

9) Scrivere le equazioni della retta s, perpendicolare al piano $\pi: 2x + 2y - z + 1 = 0$ e incidente le rette:
$a: x - 3 = y - 3z = 0$ e $b: x = -2t, y = -2, z = t$.

10)
Determinare le equazioni della retta r, passante per l'origine, incidente la retta s:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (0, 1, 2)$.

11) Date le rette:
$r: x = 2 + t, y = -1 - t, z = 4 + 3t,$
e $s: x = 3 + u, y = 2 + u, z = 4 + u,$
verificare che sono sghembe e determinare le equazioni della loro perpendicolare comune.

12) Dati il punto $P = (1, 2, -1)$ e le rette:

a: $$\frac{2-x}{2} = \frac{y-1}{3} = 1 - 2z$$

b: $$\begin{cases} z = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

determinare le equazioni della retta c passante per P, perpendicolare alla retta b e incidente la retta a.

13) Scrivere le equazioni delle rette appartenenti al piano $\alpha: x - y + 3 = 0$, parallele al piano $\beta: x - z + 1 = 0$ e aventi distanza $d = \sqrt{14}$ dal punto $A = (1, -1, 0)$.

14) Determinare la lunghezza della proiezione ortogonale del segmento AB, con $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 2, 3)$, sulla retta $r: x - y + z = x + y - z = 0$.

Esercizi sulle quadriche

1) Scrivi l'equazione di una superficie conica avente come asse di simmetria l'asse y, sapendo che il vertice è nel punto (0,2,0) e che la superficie passa per il punto (2,0,0).
Scrivi poi l'equazione della curva ottenuta tagliando la superficie conica col piano z = 1. Di che curva si tratta?

2) Scrivi l'equazione della superficie sferica di centro l'origine tangente al piano x + y + z = 3 e determina il punto di tangenza.

3) Data la superficie conica

$$x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$$

scrivi l'equazione della sfera di centro (0,0,3) tangente a tale superficie lungo una circonferenza.

4) E' data la retta x + y + z = x - 2y = 0. Facendo ruotare tale retta attorno all'asse z si ottiene una superficie quadrica. Di che superficie si tratta? Determina la sua equazione.

Esercizi sulle quadriche

1) Scrivi l'equazione di una superficie conica avente come asse di simmetria l'asse y, sapendo che il vertice è nel punto (0,2,0) e che la superficie passa per il punto (2,0,0).
Scrivi poi l'equazione della curva ottenuta tagliando la superficie conica col piano z = 1. Di che curva si tratta?

2) Scrivi l'equazione della superficie sferica di centro l'origine tangente al piano x + y + z = 3 e determina il punto di tangenza.

3) Classifica le seguenti quadriche argomentando le tue conclusioni e indicando le caratteristiche delle curve intersezione di tali superfici con piani particolari:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1 \qquad \frac{x^2}{4}-z=1 \qquad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-z^2=1$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+z^2=0 \qquad -\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1 \qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

4) Data la superficie conica $x^2+y^2-3z^2=0$

scrivi l'equazione della sfera di centro (0,0,3) tangente a tale superficie lungo una circonferenza.

5) Tagliando una superficie quadrica col piano z = 2 si ottiene una circonferenza; tagliandola con il piano x = 0 si ottiene la curva:

$$\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

Determina l'equazione della superficie e le sue caratteristiche.

6) E' data la retta x + y + z = x - 2y = 0. Facendo ruotare tale retta attorno all'asse z si ottiene una superficie quadrica. Di che superficie si tratta? Determina la sua equazione.