**5** Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x+y-z=0$.

**5** Dato un piano $ax + by + cz + d = 0$, sappiamo che il vettore $\vec{v}(a; b; c)$ è perpendicolare al piano. Nel nostro caso, il vettore $\vec{v}(1; 1; -1)$ è perpendicolare al piano σ di equazione $x + y - z = 0$. La retta perpendicolare al piano σ e passante per $O$ deve contenere il punto $P(1; 1; -1)$. Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti $O$ e $P$:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{-1-1} \rightarrow x = y = -z \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

## Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

**5** Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2; -1; 2)$, è tangente al piano $\Pi$ avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

**5** Determiniamo il punto di tangenza $T$ tra la sfera di centro $K(-2; -1; 2)$ e il piano di equazione $\pi$: $2x - 2y + z - 9 = 0$.
Il punto $T$ è l'intersezione tra il piano $\pi$ e la retta $s$ ortogonale a $\pi$ che passa per $K$.
Determiniamo un'equazione vettoriale della retta $s$.
In generale, se un piano ha equazione $ax + by + cx + d = 0$ il vettore $\vec{n} = (a; b; c)$ è ortogonale al piano. Quindi nel nostro caso il vettore $(2; -2; 1)$ è ortogonale al piano $\pi$ e un'equazione vettoriale di $s$ quindi è:

$$(x; y; z) = (-2; -1; 2) + t(2; -2; 1)$$

con $t$ numero reale. Scriviamo l'equazione in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione del piano $\pi$ le espressioni trovate per $x$, $y$ e $z$:

$$2(-2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0$$

$$-4 + 4t + 2 + 4t + 2 + t - 9 = 0$$

$$t = 1.$$

Per $t = 1$ troviamo il punto $T(0; -3; 3)$, che è il punto di tangenza cercato.

Determiniamo ora il raggio della sfera, ossia la lunghezza del segmento $TK$:

$$TK = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1+3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

La sfera quindi ha raggio 3.

Per completare lo svolgimento, anche se non è esplicitamente richiesto dal quesito, osserviamo che un'equazione della sfera è:

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

**9** Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1; 0; -2)$ determinare l'equazione del piano passante per $P$ e parallelo alle due rette.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

**9** Denotiamo con $r_1$ la retta espressa in forma parametrica e con $r_2$ quella in forma cartesiana e analizziamo la posizione reciproca tra le due rette e il punto $P$ dato. Osserviamo che $P$ non appartiene né a $r_1$, né a $r_2$, infatti, sostituendo a $x$, $y$, $z$, rispettivamente, i valori 1, 0, $-2$, entrambi i sistemi risultano impossibili. Per vedere se $r_1$ e $r_2$ sono coincidenti, incidenti o disgiunte (parallele o sghembe), studiamo il sistema seguente in 5 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}.$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t + 2t + t - 3 = 0 \\ 2t - 2t = 0 \end{cases}.$$

da cui:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Poiché esiste ed è unico il valore di $t$ per cui il sistema ha soluzione, possiamo concludere che $r_1$ ed $r_2$ sono incidenti e il loro punto d'intersezione è $Q\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Allora esiste un piano $\sigma$ che contiene $r_1$ ed $r_2$. L'equazione del piano $\pi$ passante per $P$ e parallelo alle due rette è il piano per $P$ parallelo a $\sigma$. Per calcolare l'equazione di $\sigma$ possiamo procedere in due modi diversi.

**Primo metodo:** Consideriamo un piano generico espresso in forma cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per $r_1$ ed $r_2$. Poiché $r_1$ ed $r_2$ sono incidenti e ogni retta è univocamente determinata da due suoi punti, è sufficiente imporre il passaggio del piano per $Q$, che appartiene ad entrambe, per un altro punto di $r_1$, ad esempio, $Q_1(0; 0; 0)$, e per un altro punto di $r_2$, ad esempio, $Q_2(0; 0; 3)$. Quindi studiamo il sistema:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{3}{4} + b \cdot \frac{3}{2} + c \cdot \frac{3}{4} + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 3 + d = 0 \end{cases}$$

da cui $a = -2b$, $c = d = 0$. Scegliendo $b = 1$, otteniamo $\sigma$: $2x - y = 0$.

**Secondo metodo:** Consideriamo il fascio di piani passanti per $r_2$,

$$\sigma_{\lambda\mu}: \lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y) = 0, \qquad \text{con } (\lambda; \mu) \neq (0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per $r_1$. Poiché $Q = r_1 \cap r_2$, $Q_1(0; 0; 0) \in r_1$, per trovare $\sigma$, è sufficiente imporre il passaggio di $\sigma_{\lambda\mu}$ per $Q_1$, cioè studiare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(x + y + z - 3) + \mu(2x - y) = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui $\lambda = 0$. Scegliendo $\mu = 1$, otteniamo $\sigma$: $2x - y = 0$.
Ricordiamo che un piano $ax + by + cz + d = 0$ è perpendicolare al vettore $(a; b; c)$. Nel nostro caso, il piano $\sigma$: $2x - y = 0$ è perpendicolare al vettore $(2; -1; 0)$. Di conseguenza, il piano $\pi$ che stiamo cercando, deve essere perpendicolare allo stesso vettore, per poter essere parallelo a $\sigma$. Imponendo il passaggio per $P$:

$$\begin{cases} 2x - y + d = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

otteniamo $a = 2$; $b = -1$; $c = 0$; $d = -2$, cioè $\pi$: $2x - y = 2$.

Alternativamente, scrivendo la retta $r_2$ in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 3 - 3s \end{cases}$$

osserviamo che $r_2$ è parallela al vettore $(1; 2; -3)$. Ricordando che $r_1$ è parallela al vettore $(1; 2; 1)$, il generico piano passante per $P$, cioè:

$$a(x - 1) + b(y - 0) + c(z + 2) = 0; \qquad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

è parallelo alle rette $r_1$ ed $r_2$ se il vettore $(x - 1; y; z + 2)$ è parallelo a $(1; 2; 1)$ e $(1; 2; -3)$. E questo è vero se e solo se

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli, otteniamo come prima $\pi$: $2x - y - 2 = 0$.

**5** Dati i punti $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(2; 2; -3)$, determinare l'equazione della retta $r$ passante per $A$ e per $B$ e l'equazione del piano $\pi$ perpendicolare ad $r$ e passante per $C$.

**5** La retta $r$ passante per i due punti $A(-2; 3; 1)$ e $B(3; 0; -1)$ ha direzione $\overrightarrow{AB}$.
Per scrivere le sue equazioni, determiniamo quelle della retta passante per $A$ e parallela al vettore $\overrightarrow{AB}$.
Il vettore $\overrightarrow{AB}$ ha componenti $(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A) = (3-(-2); 0-3; -1-1) = (5; -3; -2)$, quindi le equazioni parametriche della retta $r$ sono:

$$\begin{cases} x = -2 + 5k \\ y = 3 - 3k \\ z = 1 - 2k \end{cases}.$$

Osserviamo che, in alternativa, avremmo potuto ricavare l'equazione cartesiana della retta imponendo direttamente il passaggio per $A$ e $B$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \rightarrow$$

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{-1-1} \rightarrow$$

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Per determinare l'equazione del piano $\pi$, ricordiamo che un piano generico ha equazione $ax + by + cz + d = 0$, dove $(a; b; c)$ sono le coordinate del vettore normale al piano.
Il piano $\pi$ è perpendicolare alla retta $r$, quindi il vettore normale al piano coincide con la direzione della retta: $(a; b; c) = (5; -3; -2)$.
Il generico piano perpendicolare a $r$ ha quindi equazione:

$$5x - 3y - 2z + d = 0.$$

Per determinare il valore del parametro $d$, imponiamo il passaggio del piano per $C = (2; 2; -3)$:

$$5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + d = 0$$

da cui si ottiene $d = -10$.
Il piano cercato è quindi $5x - 3y - 2z - 10 = 0$.

**7** Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano $\pi$ di equazione:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

nel suo punto $P$ di coordinate $(1; 0; 2)$.

**7** I centri delle sfere tangenti a $\pi : x + 2y - z + 1 = 0$ nel suo punto $P(1; 0; 2)$ appartengono alla retta perpendicolare a $\pi$ passante per $P$.
Il vettore perpendicolare a un piano generico di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è $\vec{n}(a; b; c)$, quindi il vettore perpendicolare a $\pi$ ha coordinate $\vec{n}(1; 2; -1)$.
I centri delle sfere cercate appartengono quindi alla retta $r$ che ha direzione $\vec{n}(1; 2; -1)$ e che passa per il punto $P(1; 0; 2)$; tale retta ha equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 0 + 2k \\ z = 2 - k \end{cases}.$$

Adesso dobbiamo imporre che il raggio delle sfere sia $\sqrt{6}$, ovvero che la distanza del punto $P(1; 0; 2)$ da un punto generico di $r$ sia $\sqrt{6}$.

$$\sqrt{(1 + k - 1)^2 + (2k - 0)^2 + (2 - k - 2)^2} = \sqrt{6} \rightarrow$$

$$k^2 + 4k^2 + k^2 = 6 \rightarrow$$

$$k = \pm 1.$$

Sostituendo $k$ nelle equazioni parametriche di $r$ troviamo i centri cercati:

$$C_1: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2, \\ z = 1 \end{cases} \quad C_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \\ z = 3 \end{cases}$$

**3** Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto [1; 1; 1] al piano di equazione $2x - 3y + z = 0$.

**3** Dato un piano di equazione $ax+by+cz+d=0$, il vettore $(a;b;c)$ è la direzione perpendicolare al piano, quindi una retta perpendicolare al piano ha gli stessi coefficienti direttivi del piano. Le equazioni parametriche di una retta passante per $P\,(x_P;\,y_P;\,z_P)$ e perpendicolare al piano $ax+by+cz+d=0$ sono quindi:

$$\begin{cases} x = x_P + at \\ y = y_P + bt \\ z = z_P + ct \end{cases}.$$

Nel nostro caso, il piano ha equazione $2x-3y+z=0$, con $a=2$, $b=-3$ e $c=1$, $P$ ha coordinate $(1;1;1)$. Le equazioni parametriche della retta cercata sono:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-3t \\ z = 1+t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x-1}{2} \\ y = 1-3\cdot\dfrac{x-1}{2} \\ z = 1+\dfrac{x-1}{2} \end{cases}.$$

Un'equazione analitica della retta è allora:

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases}.$$

**9** In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta $r$ di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano $\beta$ di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di $k$ la retta $r$ e il piano $\beta$ sono paralleli, e la distanza tra di essi.

**9** Il vettore direzione della retta $r$ è $\vec{r}(2; 1; k)$, con $k \in \mathbb{R}$, mentre il vettore direzione perpendicolare al piano $P$ è $\vec{p}(1; 2; -1)$. La retta $r$ è parallela al piano $P$ se $\vec{r}$ e $\vec{p}$ sono perpendicolari, cioè se:

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = 0 \rightarrow 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + k \cdot (-1) = 0 \rightarrow k = 4.$$

La retta parallela al piano è dunque:

$$r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = 4t \end{cases}$$

La distanza fra retta e piano coincide con la distanza di un qualunque punto della retta dal piano; considerato per esempio il punto della retta di coordinate $A(1; 1; 0)$, che si ottiene per $t = 0$, otteniamo:

$$d(r, P) = d(A, P) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

**9** Dati i punti $A(-2; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(0; -1; -2)$, $D(1; 1; 0)$, determinare l'equazione del piano $\alpha$ passante per i punti $A$, $B$, $C$ e l'equazione della retta passante per $D$ e perpendicolare al piano $\alpha$.

**9** Un generico piano nello spazio ha equazione $ax+by+cz+d=0$ con $a$, $b$ e $c$ numeri reali non tutti nulli; imponiamo il passaggio di tale piano per i punti $A(-2;0;1)$, $B(1;1;2)$, $C(0;-1;-2)$:

$$\begin{cases}-2a+c+d=0\\ a+b+2c+d=0\\ -b-2c+d=0\end{cases} \to \begin{cases}-2a+c+d=0\\ a+(-2c+d)+2c+d=0\\ b=-2c+d\end{cases} \to \begin{cases}-2a+c+d=0\\ a+2d=0\\ b=-2c+d\end{cases} \to$$

$$\begin{cases}-2(-2d)+c+d=0\\ a=-2d\\ b=-2c+d\end{cases} \to \begin{cases}5d+c=0\\ a=-2d\\ b=-2c+d\end{cases} \to \begin{cases}c=-5d\\ a=-2d\\ b=-2c+d\end{cases} \to \begin{cases}a=-2d\\ b=11d\\ c=-5d\end{cases}.$$

Poiché possiamo scegliere arbitrariamente il valore di $d$, purché diverso da zero, poniamo $d=1$ e otteniamo:

$$a=-2,\quad b=11,\quad c=-5,\quad d=1.$$

Il piano passante per $A$, $B$, $C$ ha dunque equazione:

$$\alpha: -2x+11y-5z+1=0.$$

Il vettore $\vec{v}(-2;11;-5)$, formato dai coefficienti delle incognite dell'equazione del piano $\alpha$, risulta perpendicolare al piano stesso e costituisce quindi il vettore di direzione delle rette ortogonali ad $\alpha$. Fra tutte cerchiamo la retta $r$ passante per $D(1;1;0)$, ricorrendo alle equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases}x=1-2t\\ y=1+11t,\ \text{con } t\in\mathbb{R}.\\ z=-5t\end{cases}$$

Determiniamo le equazioni cartesiane della retta $r$:

$$\begin{cases}x=1-2t\\ y=1+11t\\ z=-5t\end{cases} \to \begin{cases}t=\dfrac{1-x}{2}\\ t=\dfrac{y-1}{11}\\ t=-\dfrac{z}{5}\end{cases} \to \begin{cases}\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{y-1}{11}\\ \dfrac{1-x}{2}=-\dfrac{z}{5}\end{cases} \to \begin{cases}11x+2y-13=0\\ 5x-2z-5=0\end{cases}.$$

**9** Dati i punti $A(4; 14; 17)$, $B(16; 11; 14)$, $C(16; 2; 23)$:

**a.** si dimostri che il triangolo $ABC$ è isoscele e rettangolo;

**b.** quali sono le coordinate del punto $D$ tale che $ABCD$ sia un quadrato?

**9** **a.** In un sistema di riferimento $Oxyz$ consideriamo i punti di coordinate:

$A(4; 14; 17)$, $B(16; 11; 14)$, $C(16; 2; 23)$.

Calcoliamo la lunghezza dei tre lati:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-16)^2+(14-11)^2+(17-14)^2} = \sqrt{144+9+9} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2};$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-16)^2+(14-2)^2+(17-23)^2} = \sqrt{144+144+36} = \sqrt{324} = 18;$$

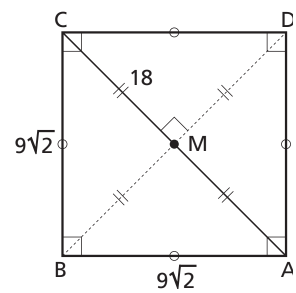
$$\overline{BC} = \sqrt{(16-16)^2+(11-2)^2+(14-23)^2} = \sqrt{0+81+81} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}.$$

Il triangolo $ABC$ è quindi isoscele, perché ha i due lati $AB$ e $BC$ congruenti.
Poiché vale la relazione:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

in quanto $324 = 162 + 162$, il triangolo è anche rettangolo, con ipotenusa $AC$.

**b.** Il quadrato è l'unico quadrilatero in cui le diagonali sono perpendicolari, congruenti e si intersecano nel loro punto medio. Quindi il punto di coordinate generiche $D(x; y; z)$ è il vertice di un quadrato $ABCD$ se risulta simmetrico di $B$ rispetto alla retta $AC$.




■ **Figura 18**

Deve allora essere:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \quad \to \quad x_D = 2x_M - x_B;$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \quad \to \quad y_D = 2y_M - y_B;$$

$$z_M = \frac{z_B + z_D}{2} \quad \to \quad z_D = 2z_M - z_B;$$

Le coordinate di $M$ sono:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4+16}{2} = 10; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{14+2}{2} = 8; \quad z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{17+23}{2} = 20.$$

Possiamo infine ricavare le coordinate di $D$:

$$x_D = 2x_M - x_B = 2 \cdot 10 - 16 = 4;$$

$$y_D = 2y_M - y_B = 2 \cdot 8 - 11 = 5;$$

$$z_D = 2z_M - z_B = 2 \cdot 20 - 14 = 26.$$

Il punto $D$ ha coordinate $D(4; 5; 26)$.

**10** Si considerino nello spazio il punto $P(1; 2; -1)$ ed il piano $\alpha$ di equazione $x - 2y + z + 4 = 0$.

**a.** Verificare che $P \in \alpha$;

**b.** determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio 6 che sono tangenti ad $\alpha$ in $P$.

**10** Nel sistema di riferimento $Oxyz$ consideriamo il punto $P(1; 2; -1)$ e il piano di equazione $\alpha: x - 2y + z + 4 = 0$.

**a.** Per stabilire se il punto giace sul piano, sostituiamo le coordinate di $P$ nell'equazione del piano:

$$(1) - 2 \cdot (2) + (-1) + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 4 - 1 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0.$$

Abbiamo ottenuto un'identità, quindi $P \in \alpha$.

**b.** Se $\Sigma$ è una superficie sferica di raggio 6 tangente ad $\alpha$ in $P$, allora il centro $C$ di $\Sigma$ individua una retta $CP$ perpendicolare al piano $\alpha$ e $CP$ è lungo 6.
Il vettore di direzione $\vec{r}$ delle rette perpendicolari ad $\alpha$ è costituito dai coefficienti delle incognite di $\alpha$, quindi:

$$\vec{r}(1; -2; 1).$$

La retta $r$ passante per $P$ e perpendicolare ad $\alpha$ ha equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

Determiniamo i punti $C$ di $r$ che distano 6 da $P$:

$$\overline{CP} = 6 \quad \rightarrow \quad \overline{CP}^2 = 36 \quad \rightarrow$$

$$(1 + t - 1)^2 + (2 - 2t - 2)^2 + (-1 + t + 1)^2 = 36 \quad \rightarrow$$

$$t^2 + 4t^2 + t^2 = 36 \quad \rightarrow \quad 6t^2 = 36 \quad \rightarrow \quad t^2 = 6 \quad \rightarrow \quad t = \pm\sqrt{6}.$$

Otteniamo due punti:

$$C_1(1 - \sqrt{6}; 2 + 2\sqrt{6}; -1 - \sqrt{6}); \qquad C_2(1 + \sqrt{6}; 2 - 2\sqrt{6}; -1 + \sqrt{6}).$$

La superficie sferica $\Sigma_1$ di centro $C_1$ e raggio 6, che risulta tangente ad $\alpha$ in $P$, ha equazione:

$$(x - 1 + \sqrt{6})^2 + (y - 2 - 2\sqrt{6})^2 + (z + 1 + \sqrt{6})^2 = 36.$$

La superficie sferica $\Sigma_2$ di centro $C_2$ e raggio 6, che risulta sempre tangente ad $\alpha$ in $P$, ha equazione:

$$(x - 1 - \sqrt{6})^2 + (y - 2 + 2\sqrt{6})^2 + (z + 1 - \sqrt{6})^2 = 36.$$

## Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

**4** Nello spazio sono dati due piani $\alpha$ e $\beta$ rispettivamente di equazione:

$\alpha)$ $x-3y+z-5=0$

$\beta)$ $x+2y-z+3=0$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta $r$ da essi individuata verificare che essa appartiene al piano $\gamma$ di equazione $3x+y-z+1=0$.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

**4** I due piani si intersecano lungo una retta perché i coefficienti delle variabili corrispondenti non hanno lo stesso rapporto $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{2}\right)$.

La retta $r$ intersezione di $\alpha$ e $\beta$ è rappresentata dal sistema formato dalle equazioni dei due piani.

$$r = \alpha \cap \beta = \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ (3y - z + 5) + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ 5y - 2z + 8 = 0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases} \to \begin{cases} x = 3\left(\frac{2}{5}z - \frac{8}{5}\right) - z + 5 \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{1}{5}z + \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases}$$

Posto $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$, troviamo l'equazione parametrica della retta $r = \alpha \cap \beta$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}t + \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} \\ z = t \end{cases}$$

Verifichiamo che la retta appartiene al piano $\gamma$ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$; per farlo, sostituiamo a $x$, $y$, $z$ nell'equazione del piano le espressioni parametriche di $r$, e verifichiamo che otteniamo un'identità:

$$3\left(\frac{1}{5}t + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}t - \frac{8}{5}\right) - t + 1 = 0 \to \frac{3}{5}t + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} - t + 1 = 0 \to 0 = 0.$$

Avendo ottenuto un'identità, risulta $r \subset \gamma$.

**9** In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta $r$ di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano $P$ di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di $k$ la retta $r$ e il piano $P$ sono paralleli, e la distanza tra di essi.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

**9** Il vettore direzione della retta $r$ è $\vec{r}(2; 1; k)$, con $k \in \mathbb{R}$, mentre il vettore direzione perpendicolare al piano $P$ è $\vec{p}(1; 2; -1)$. La retta $r$ è parallela al piano $P$ se $\vec{r}$ e $\vec{p}$ sono perpendicolari, cioè se:

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = 0 \rightarrow 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + k \cdot (-1) = 0 \rightarrow k = 4.$$

La retta parallela al piano è dunque:

$$r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = 4t \end{cases}$$

La distanza fra retta e piano coincide con la distanza di un qualunque punto della retta dal piano; considerato per esempio il punto della retta di coordinate $A(1; 1; 0)$, che si ottiene per $t = 0$, otteniamo:

$$d(r, P) = d(A, P) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

**6** In un sistema di riferimento cartesiano il piano $\pi$ di equazione $3x - 4y - 22 = 0$ è tangente a una sfera avente come centro il punto $C(3; 3; 0)$. Determinare il raggio della sfera.

**6** Il piano $\pi$ di equazione $3x - 4y - 22 = 0$ è tangente alla sfera di centro $C(3; 3; 0)$, quindi la lunghezza del raggio della sfera è dato dalla distanza del punto $C$ dal piano $\pi$:

$$r_{\text{sfera}} = d(C; \pi) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

**8** Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto $P$ di coordinate $(1; 1, 0)$ al piano di equazione $2x - 2y + z = 0$.

**8** I coefficienti di $x$, $y$ e $z$ nell'equazione $2x - 2y + z = 0$ del piano $\alpha$ individuano il vettore di direzione ortogonale al piano stesso. Quindi, il vettore $(2; -2; 1)$ ortogonale ad $\alpha$.
L'equazione della retta passante per $P(1; 1; 0)$ e ortogonale al piano $\alpha$, in forma parametrica, è:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - 2k \\ z = k \end{cases}.$$

Dalla posizione $z = k$ otteniamo subito anche una possibile coppia di equazioni cartesiane della retta:

$$\begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 1 - 2z \end{cases}.$$

## PROBLEMA 1

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano $Oxy$ in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(-4; 25)$ e $(4; 25)$; nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse $x$ e la curva di equazione $y=-\frac{25}{16}x^2+25$, $x\in[-4; 4]$, la seconda parte di piano compresa tra l'asse $x$, la curva di equazione $y=\frac{100}{4+x^2}$ e le rette $x=-2\sqrt{3}$, $x=2\sqrt{3}$.

**a.** Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano $Oxy$. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

**b.** Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x\in[-2\sqrt{3}; 0]$ che per $x\in[0; 2\sqrt{3}]$ la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione $f(x)=|x|+1$; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.

**c.** Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $[-2\sqrt{3}; 0]$.

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, tale piano deve passare per i punti $(-4; 0; 5)$, $(4; 0; 5)$ e $(0; 25; 4)$, in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

**d.** Determina l'equazione del piano prescelto.

## PROBLEMA 1

**a.** Studiamo le funzioni $p(x) = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ e $g(x) = \frac{100}{4 + x^2}$ nel dominio richiesto dal problema.

- $p(x) = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ rappresenta una parabola simmetrica rispetto all'asse $y$ con la concavità rivolta verso il basso e di vertice $V(0; 25)$. La funzione $p(x)$ è quindi è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$ e ammette massimo assoluto in $V$.

  Nel dominio $[-4; 4]$ considerato, la curva assume minimo nei punti $A(-4; 0)$ e $D(4; 0)$, due dei vertici del rettangolo che dovrebbe contenere la pista.

- $g(x) = \frac{100}{4 + x^2}$ è razionale fratta, con denominatore $4 + x^2$ sempre positivo: il suo dominio naturale è $\mathbb{R}$. È una funzione pari, $g(-x) = \frac{100}{4 + (-x)^2} = \frac{100}{4 + x^2} = g(x)$, quindi simmetrica rispetto all'asse $y$. Il punto di intersezione tra l'asse $y$ e il grafico di $g(x)$ coincide con il vertice $V(0; 25)$ della parabola.

  Non ci sono invece punti di intersezione tra il grafico di $g(x)$ e l'asse $x$, in quanto $g(x)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.

  La derivata prima di $g(x)$ si può calcolare con la regola di derivazione delle funzioni composte:

  $$g'(x) = -\frac{100}{(4 + x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{200x}{(4 + x^2)^2}.$$

  Il denominatore è sempre positivo; $g'(x)$ si annulla solo per $x = 0$, è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$. Quindi $g(x)$ è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$ e ha un punto di massimo sia relativo sia assoluto per $x = 0$, con $g(0) = 25$ (corrisponde al punto $V$).

  La derivata seconda è:

  $$g''(x) = -200 \cdot \frac{(4 + x^2)^2 - 4x^2(4 + x^2)}{(4 + x^2)^4} = (3x^2 - 4) \cdot \frac{200}{(4 + x^2)^3}.$$

  Il secondo fattore è sempre positivo, quindi il segno di $g''(x)$ è quello di $3x^2 - 4$. Risulta allora:

  $$g''(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3};$$

  $$g''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x > \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

  Concludiamo che la concavità del grafico di $g(x)$ è rivolta verso il basso per $x \in \left]-\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right[$, mentre è rivolta verso l'alto per $x$ esterno a tale intervallo. Gli estremi $x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ corrispondono a punti di flesso con tangente obliqua.

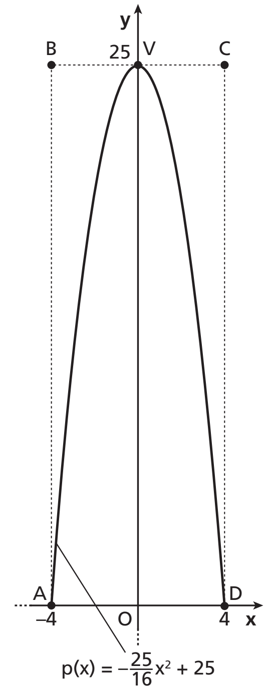
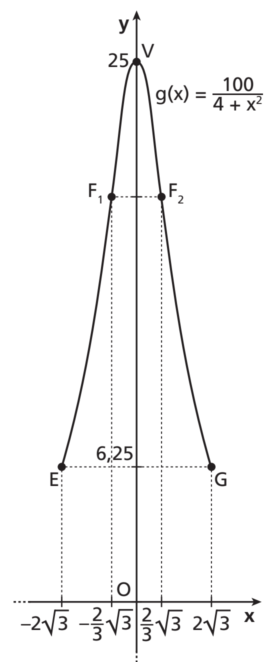



Figura 1

Figura 2



Calcoliamo il valore di $g(x)$ in tali punti:

$$g\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=g\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{75}{4}=18,75.$$

Si ottengono i due flessi, simmetrici rispetto all'asse $y$: $F_{1,2}\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3};\frac{75}{4}\right)$. Nell'intervallo $[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}]$, il grafico di $g(x)$ presenta dunque il massimo in $V$ e due flessi. Negli estremi dell'intervallo, $x=\pm2\sqrt{3}$, la funzione $g(x)$ assume il valore $g(-2\sqrt{3})=g(2\sqrt{3})=\frac{25}{4}=6,25$ e il grafico presenta i due punti di minimo $E(-2\sqrt{3};6,25)$ e $G(2\sqrt{3};6,25)$.

**b.** L'area compresa tra il grafico della funzione $g(x)$, l'asse $x$ e le due rette di equazioni $x=-2\sqrt{3}$ e $x=2\sqrt{3}$ è data dall'integrale definito di $g(x)$ esteso all'intervallo $[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}]$.

Cerchiamo la primitiva di $g(x)$:

$$\int\frac{100}{4+x^2}dx=100\int\frac{1}{4\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]}dx=50\int\frac{\left(\frac{1}{2}\right)dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=50\arctan\frac{x}{2}+c.$$

Calcoliamo allora l'area, ovvero l'integrale definito:

$$\text{area}=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{100}{4+x^2}dx=\left[50\arctan\frac{x}{2}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}=$$

$$50\left[\arctan\sqrt{3}-\arctan(-\sqrt{3})\right]=50\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{100}{3}\pi\simeq104,72.$$

L'area corrispondente alla soluzione scelta è dunque area $=104{,}72\ \text{m}^2$.
L'area del rettangolo che contiene la pista è $\text{area}_r=8\cdot25=200\ \text{m}^2$, quindi la porzione occupata dalla pista è $\frac{\text{area}}{\text{area}_r}=\frac{104,72}{200}\simeq0,52=52\%$.

Essa risulta entro i limiti del 60% consentiti dal vincolo urbanistico: si può procedere alla costruzione.

**c.** Abbiamo già osservato che i massimi di $p(x)$ e $g(x)$ coincidono, essendo $p(0)=g(0)=25$. Inoltre, i grafici di $p(x)$ e $g(x)$ si intersecano anche nei punti $E$ e $G$, in quanto:

$$p(-2\sqrt{3})=p(2\sqrt{3})=\frac{25}{4}=6,25.$$

Per trovare quanto terreno serve per riempire l'aiuola che appartiene al secondo quadrante, è necessario calcolare il volume $V$ del solido che ha:

- come base la superficie compresa tra le due curve, per $x\in[-2\sqrt{3};0]$;
- come sezioni, ottenute con i piani perpendicolari all'asse $x$, dei rettangoli di altezza $1+|x|$ e base $p(x)-g(x)$.

Per la simmetria dei grafici, possiamo calcolare il volume nell'intervallo $[0;2\sqrt{3}]$, in cui $x\geq0$ e l'altezza è $1+x$:

$$V=\int_{-2\sqrt{3}}^{0}[p(x)-g(x)](1+|x|)dx=\int_{0}^{2\sqrt{3}}[p(x)-g(x)](1+x)dx=$$

$$\int_0^{2\sqrt{3}}\left(-\frac{25}{16}x^2+25-\frac{100}{4+x^2}\right)(1+x)dx=$$

$$\int_0^{2\sqrt{3}}\left(-\frac{25}{16}x^2+25-\frac{100}{4+x^2}-\frac{25}{16}x^3+25x-\frac{100x}{4+x^2}\right)dx=$$

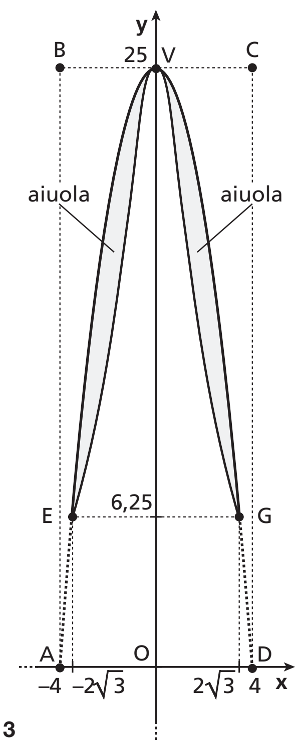


**Figura 3**

$$\left[-\frac{25}{48}x^3+25x-50\arctan\frac{x}{2}-\frac{25}{64}x^4+\frac{25}{2}x^2-50\ln(4+x^2)\right]_0^{2\sqrt{3}}=$$

$$\left(-\frac{25}{2}\sqrt{3}+50\sqrt{3}-\frac{50}{3}\pi-\frac{225}{4}+150-100\ln 2\right)=$$

$$\frac{375}{4}+\frac{75}{2}\sqrt{3}-\frac{100}{6}\pi-100\ln 2\simeq 37{,}03.$$

Servono allora 37,03 $m^3$ di terreno vegetale per riempire l'aiuola delimitata dalla curva nell'intervallo $[-2\sqrt{3}\,;0]$.

**d.** L'equazione cartesiana del generico piano è $ax+by+cz=d$, dove i coefficienti $a, b, c, d$ sono determinati a meno di una costante moltiplicativa.

Imponendo il passaggio del piano per i tre punti $(-4; 0; 5)$, $(4; 0; 5)$ e $(0; 25; 4)$, otteniamo il sistema omogeneo di tre equazioni nelle incognite $a, b, c$ e $d$:

$$\begin{cases}-4a+5c-d=0\\4a+5c-d=0\\25b+4c-d=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}8a=0\\10c-2d=0\\25b+4c-d=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\d=5c\\25b+4c-5c=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\c=25b\\d=5c=125b\end{cases}.$$

Abbiamo infinite soluzioni, dipendenti da un parametro, $b\in\mathbb{R}$.

Ponendo $b=1$, otteniamo il piano di equazione:

$$y+25z-125=0.$$

**4** In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti $A(-3; 4; 0)$ e $C(-2; 1; 2)$. I tre punti $O$, $A$ e $C$ giacciono su un piano $E$. Determinare l'equazione che descrive il piano $E$.

**4** L'equazione cartesiana che descrive un piano nello spazio è:

$$ax + by + cz = d,$$

con $a$, $b$ e $c$ non tutti nulli.
Per trovare l'equazione del piano, basta imporre il passaggio per i tre punti dati, $O$, $A$, $C$, e risolvere il sistema nelle incognite $a, b, c, d$. Ci aspettiamo che le soluzioni siano infinite, descritte da un parametro.

$$\begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = d \\ -3 \cdot a + 4 \cdot b + 0 \cdot c = d \\ -2 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c = d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + 4b = 0 \\ -2a + b + 2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + 8a - 8c = 0 \\ b = 2a - 2c \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5a - 8c = 0 \\ b = 2a - 2c \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{5}c \\ b = \frac{6}{5}c \\ d = 0 \end{cases}$$

L'equazione del piano è $\frac{8}{5}cx + \frac{6}{5}cy + cz = 0$, con $c \neq 0$ altrimenti i coefficienti sarebbero tutti nulli. Dividendo per $c$ otteniamo:

$$\frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y + z = 0 \rightarrow 8x + 6y + 5z = 0,$$

che è quindi una possibile equazione del piano $E$ cercato.

**6** I punti $A(3; 4; 1)$, $B(6; 3; 2)$, $C(3; 0; 3)$, $D(0; 1; 2)$, sono vertici di un quadrilatero $ABCD$. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

**6** Dimostriamo che il punto medio di $AC$ coincide con il punto medio di $DB$.

$$M_{AC}\left(\frac{3+3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{1+3}{2}\right) \rightarrow M_{AC}(3; 2; 2); \qquad M_{BD}\left(\frac{6}{2}; \frac{3+1}{2}; \frac{2+2}{2}\right) \rightarrow M_{BD}(3; 2; 2).$$

Quindi $M_{AC} = M_{BD}$.

Poiché le diagonali si dimezzano scambievolmente, il quadrilatero è un parallelogramma (osserviamo che il fatto che i punti medi delle due diagonali coincidano assicura che i punti $A$, $B$, $C$, $D$ giacciono su un piano).

Il parallelogramma $ABCD$ sarebbe in particolare un rettangolo se le diagonali avessero la stessa lunghezza. Calcoliamo:

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-3)^2 + (4-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20},$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(0-6)^2 + (1-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{40}.$$

Poiché le diagonali hanno misure diverse, $ABCD$ non è un rettangolo.

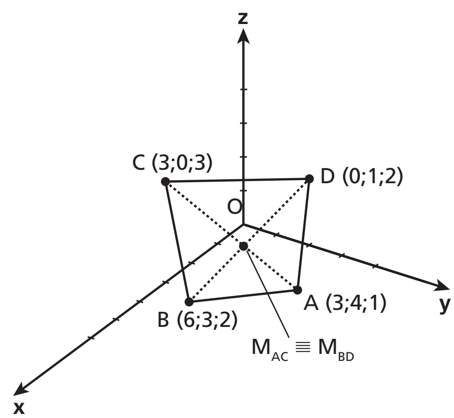



Figura 17

**7** Determinare la distanza tra il punto $P(2; 1; 1)$ e la retta:

$$\begin{cases} x+y=z+1 \\ z=-y+1 \end{cases}.$$

**7** Scriviamo la retta $r$: $\begin{cases} x+y=z+1 \\ z=-y+1 \end{cases}$ in forma parametrica, ponendo $y=t$. Otteniamo:

$$\begin{cases} x=-t-t+1+1 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=-2t+2 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases}.$$

Un vettore di direzione della retta $r$, e quindi del piano a essa perpendicolare, è $(-2;1;-1)$.
L'equazione del piano $\pi$ passante per $P(2;\,1;\,1)$ e perpendicolare alla retta è dunque:

$$\pi: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \;\rightarrow\; -2(x-2)+1(y-1)-1(z-1)=0 \rightarrow$$

$$2x-y+z-4=0.$$

Calcoliamo le coordinate del punto $Q$ di intersezione tra la retta $r$ e il piano $\pi$. Sostituiamo le equazioni parametriche della retta nell'equazione del piano e otteniamo:

$$2(2-2t)-(t)+(1-t)-4=0 \rightarrow t=\frac{1}{6}.$$

$$Q: \begin{cases} x=-\frac{1}{3}+2 \\ y=\frac{1}{6} \\ z=-\frac{1}{6}+1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad Q: \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{1}{6}. \\ z=\frac{5}{6} \end{cases}$$

La distanza $PQ$ è la distanza del punto $P$ dalla retta $r$ e vale:

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(2-\frac{5}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{30}{36}}=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

**2** Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto (1; 0; 3) al piano di equazione $3x+2y-z=0$.

**2** Le rette perpendicolari al piano di equazione $3x + 2y - z = 0$ hanno vettore di direzione $(3; 2; -1)$, dato dai coefficienti delle incognite dell'equazione del piano.
Fra tali rette perpendicolari, individuiamo quella passante per il punto $(1; 0; 3)$; con la forma parametrica troviamo:

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 0 + 2k \\ z = 3 - k \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2k \\ z = 3 - k \end{cases}, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Ricaviamo le equazioni in forma cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2k \\ z = 3 - k \end{cases} \to \begin{cases} k = \dfrac{x-1}{3} \\ k = \dfrac{y}{2} \\ k = 3 - z \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{x-1}{3} = 3 - z \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ x + 3z - 10 = 0 \end{cases}.$$

**6** Determinare la distanza tra il punto $P(6; 6; 8)$ e la retta:

$$\begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases}.$$

**6** La distanza di $P(6;6;8)$ dalla retta

$$r: \begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

coincide con la distanza di $P$ dal punto $Q$ individuato dall'intersezione fra $r$ e il piano $\alpha$ passante per $P$ e perpendicolare a $r$.
Cerchiamo le equazioni parametriche di $r$:

$$\begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2z + y + 1 \\ z = y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k + k \\ y + 1 = k \\ z = k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = k - 1, \\ z = k \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Il piano $\alpha$ passante per $P$ e perpendicolare a $r$ è dato allora da:

$$3 \cdot (x - 6) + 1 \cdot (y - 6) + 1 \cdot (z - 8) = 0 \rightarrow 3x + y + z - 32 = 0.$$

Determiniamo l'intersezione $Q$ fra $r$ e $\alpha$:

$$3(3k) + (k - 1) + k - 32 = 0 \rightarrow 9k + k - 1 + k - 32 = 0 \rightarrow 11k = 33 \rightarrow k = 3$$

da cui:

$$Q: \begin{cases} x = 3 \cdot 3 \\ y = 3 - 1 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow Q(9;2;3).$$

La distanza cercata $\overline{PQ}$ è uguale a:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(9-6)^2 + (2-6)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$