EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Una equazione differenziale è una equazione la cui incognita è una funzione che compare nell'equazione con alcune sue derivate o solo attraverso le sue derivate.

Esempi: $y''(x) - 3\,y(x) = x$ $\quad y'(x) + y''(x) = 3\,\text{sen}x$ $\quad y''' - y'' + 3\,x = 0$

Poiché ad ogni funzione integrabile corrispondono infinite primitive, una equazione differenziale ha infinite soluzioni y = y(x); la famiglia di tutte le infinite soluzioni va sotto il nome di "integrale generale dell'equazione differenziale".
Si ottengono soluzioni particolari imponendo condizioni dette condizioni iniziali o condizioni al contorno.
Problema di Cauchy: Un noto teorema di Cauchy, che qui non riportiamo, assicura che, sotto certe ipotesi, assegnata la condizione iniziale (detta condizione iniziale di Cauchy), esiste ed è unica la soluzione dell'equazione differenziale.

Esempio (1): Risolvi il problema di Cauchy: y' = cos x, con la condizione iniziale y(0) = 3

$$y' = \cos x \to \frac{dy}{dx} = \cos x \to dy = \cos x dx \to \int dy = \int \cos x dx$$

L'integrale generale quindi è: $y = senx + c$
Imponendo la condizione iniziale y (0) = 3, si ottiene la soluzione particolare: $y = senx + 3$.

Se l'equazione è di ordine superiore al primo, si avranno più condizioni iniziali (per y, y' ecc.)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Compare soltanto la derivata prima. Ogni equazione di questo tipo è riconducibile alla forma:
F(x, y, y') = 0

Esempio: $y' + y - e^x = 0$; $y' - x^3 = 0$

Analizziamo alcuni tipi di equazioni del primo ordine:

1) Equazioni del tipo: y' = f(x)
Si tratta di una semplice integrazione. Vedi esempio (1).

2) Equazioni a variabili separate o separabili

variabili separate:

$$xdx = ydy$$

le variabili x e y compaiono separate, una al primo membro, l'altra al secondo. Posso quindi integrare.

$$\int xdx = \int ydy \to \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c' \to x^2 - y^2 = c$$

L'integrale generale è in questo caso una famiglia di iperboli equilatere.
(c può essere determinata se viene assegnata una condizione iniziale)

variabili separabili:

$$\frac{dy}{dx} = 4xy^2$$

Con qualche passaggio algebrico posso separare i termini in x da quelli in y. Ponendo y ≠ 0.

$$\frac{dy}{y^2} = 4xdx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 4xdx \rightarrow -\frac{1}{y} = 2x^2 + c \rightarrow y = -\frac{1}{2x^2 + c}$$

Si era posto y ≠ 0 per procedere con la soluzione. Ora verifico se tale soluzione è accettabile, sostituendo nell'equazione iniziale:

$y'(x) = 4xy^2$ Se y = 0, anche y' = 0, l'equazione è soddisfatta (0 = 0).

Quindi la soluzione completa è : $$y = -\frac{1}{2x^2 + c} \vee y = 0$$

3) Equazioni lineari del primo ordine. La forma generale è:

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

Se *b(x) = 0*, l'equazione si dice omogenea e diventa una equazione a variabili separabili [vedi punto 2)].

Se *b(x) ≠ 0*, l'equazione si dice completa. Si dimostra che l'integrale generale è dato da:

$$y = e^{\int a(x)dx} \left[\int b(x) e^{-\int a(x)dx} dx + c \right] \quad (*)$$

3 bis) Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti.
Se ci limitiamo a considerare il caso in cui a(x) e b(x) siano delle costanti, cioè numeri reali, l'equazione sarà del tipo:

$$y' = Ay + B$$

e la soluzione generale dell'equazione scritta in questa forma diventa:

$$(**) \qquad y = -\frac{B}{A} + c \cdot e^{Ax}$$

(deduci per esercizio la (**) dalla (*) e prova ad applicare tale soluzione alla fase di carica del circuito RC)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Sono equazioni che contengono la derivata seconda della y come massimo ordine.
F(x, y, y', y'') = 0
Ci limitiamo a considerare le:
equazioni omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti: y'' + b y' + c y = 0

All'equazione differenziale è associata l'equazione caratteristica, cioè l'equazione algebrica di secondo grado: $z^2 + bz + c = 0$.
Si distinguono tre casi:
Δ > 0 : si calcolano le soluzioni z_1 e z_2; l'integrale generale è: $y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}$
(le costanti c_1 e c_2 si possono determinare avendo assegnato le condizioni iniziali per y e y')

Δ = 0: si ha una sola soluzione z_1; l'integrale generale è: $y = e^{z_1 x}(c_1 + c_2 x)$

Δ < 0: non ci sono soluzioni reali per l'equazione caratteristica, vi sono due soluzioni complesse:

$$z = \alpha \pm i\beta$$

L'integrale generale è: $$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

(Esempio: circuito LC ideale)