DISEQUAZIONI FRAZIONARIE E ALTRO…

Intervalli e rappresentazioni

La scrittura **x>1** rappresenta l'intervallo illimitato dei numeri reali maggiori di 1, escluso 1.
La rappresentazione grafica è:

-----------○_________________
1

La scrittura **x≤2** rappresenta l'intervallo illimitato dei numeri reali minori di 2,compreso 2.
La rappresentazione grafica è:

________________● --------------

2

La scrittura **1<x≤2** rappresenta l'intervallo limitato dei numeri reali maggiori di 1 e minori di 2, escluso 1 e compreso 2.
La rappresentazione grafica è:

...........○____________●...........
1 2

Ripassino di alcune proprietà delle frazioni

Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da zero (positivo e negativo) si ottiene una frazione equivalente.
Pertanto tale operazione non modifica il verso di una disequazione del seguente tipo:

EX: $\frac{6x-2}{-2x}>0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x}>0$

Se si cambia segno al solo numeratore o al solo denominatore di una frazione, si ottiene una frazione di segno opposto. Pertanto tale operazione modifica il verso di una disequazione del seguente tipo:

EX: $\frac{6x-2}{-2x}>0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x}<0$

Disequazioni frazionarie di primo grado

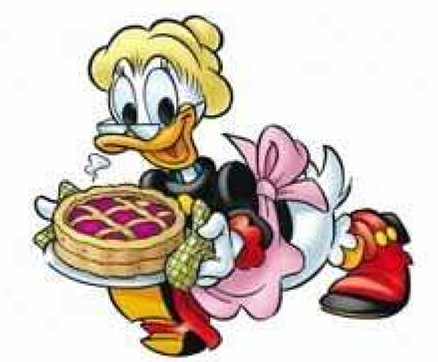
Data una disequazione con somme di frazioni algebriche, innanzitutto si riporta sempre la disequazione nella forma:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \geq,>,\leq,< 0$$

Cioè il secondo membro deve essere il numero 0!

Si procede poi allo studio del segno di numeratore e denominatore secondo il…

METODO CLASSICO: RICETTA DELLA NONNA
(funziona sempre)



Si pongono sempre Numeratore e Denominatore >0 (mai <0 !!!!), per trovare gli intervalli dove sono positivi e di conseguenza quelli dove sono negativi.
Se nella disequazione la frazione è richiesta essere ≥ 0 oppure ≤ 0, il numeratore va posto ≥ 0. Il denominatore va sempre solo posto >0, non potendosi annullare mai.
Si costruisce poi lo schema per lo studio del prodotto dei segni e si sceglie l'intervallo risolvente in base a quanto era richiesto dall'esercizio.

Se la frazione, nella sua forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, era richiesta essere >0, si prenderanno come soluzione gli intervalli dove il prodotto dei segni è +, se la frazione era richiesta essere negativa, si prenderanno come soluzione gli intervalli dove si legge segno -.

Prodotto di termini di primo grado

Si procede in maniera del tutto analoga se, invece di una frazione, si ha un prodotto di termini di primo grado, ottenuto ad esempio dalla scomposizione di un trinomio. Si chiamano i due binomi A e B e si studia il loro segno.
Ad esempio:

$$\underbrace{(3x-2)}_{A}\cdot\underbrace{(1-x)}_{B}<0$$

Si pone A>0 e B>0 (oppure A≥ 0 e B≥ 0, se l'espressione chiede≥ 0 oppure ≤ 0), se ne studia il segno, si costruisce lo schema per lo studio del segno del prodotto e si sceglie la soluzione in modo identico al caso precedente.
Il procedimento vale anche se si ha il prodotto di 3 o più parentesi: Si pongono A, B, C, D... >0 e si fa un solo schema per lo studio del segno del loro prodotto.

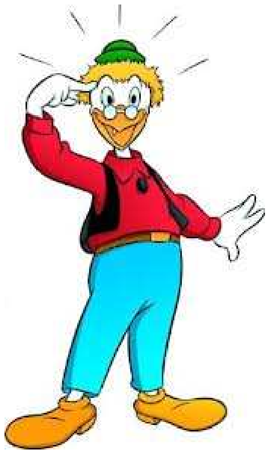
Generalizzando …
Poiché la regola del prodotto dei segni vale sia nelle moltiplicazioni, sia nelle divisioni, nel caso si abbia una disequazione riguardante una frazione algebrica, il cui denominatore e denominatore siano di grado ≥ 2, si procede così:
si scompongono entrambi(quando possibile)ai minimi termini.
Si pongono tutti i termini così ottenuti >0 (eventualmente i termini al numeratore ≥ 0, se la frazione deve essere ≥ 0 oppure ≤ 0). Si costruisce un solo schema con tante linee quante sono i termini studiati. Ad esempio:

$$\frac{A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)}{D(x)\cdot E(x)}<0$$

Si pongono: $A(x)>0$, $B(x)>0$, $C(x)>0$, $D(x)>0$, $E(x)>0$. Si fa uno schema con 5 linee riportando i risultati trovati per A,B,C,D,E e si studia il prodotto dei segni; la soluzione sarà data, in questo esempio, dagli intervalli dove il segno complessivo è -.

Casi particolari

risolubili in modo più rapido col metodo "Ragiona"…



Spesso può accadere che in una disequazione di qualsiasi tipo compaiano termini (numerici o algebrici) sempre positivi.
Un termine sempre positivo, moltiplicato o diviso, non modifica ovviamente il segno dell'espressione in cui compare.
Esso perciò può essere non considerato ai fini della soluzione dell'esercizio, con le dovute accortezze…

Esempi:

a) $\frac{3}{4-x}<0$

Trascuriamo il metodo della nonna e ragioniamo diversamente:
il numero 3 è positivo, quindi il numeratore è sempre positivo.
L'esercizio chiede che la frazione sia negativa, l'unica possibilità è quindi che il denominatore sia negativo (+/- = -).
La disequazione quindi può essere riscritta come 4-x<0, cioè x>4.

b) $\frac{-2}{4-x}<0$

Se lascio la disequazione così scritta, senza cambiare segni, avrò che il numeratore è sempre negativo; se la frazione deve essere negativa, il denominatore deve essere necessariamente positivo (-/+ = -). Quindi posso riscrivere la disequazione come:

4-x>0 cioè x<4.

c) $\frac{3(2-3x)}{4-x}<0$ Il fattore 3 non incide sul segno della frazione quindi posso eliminarlo: $\frac{(2-3x)}{4-x}<0$.

d)La stessa cosa vale per espressioni algebriche sempre positive:

$$\frac{(2-3x)}{x(1+x^2)}<0$$

Il termine $(1+x^2)$ è somma di termini positivi, è sempre positivo strettamente, cioè mai uguale a zero.

Non modifica il segno dell'espressione, posso non considerarlo e riscrivere l'esercizio come:

$$\frac{(2-3x)}{x}<0$$

d) $\frac{(2-3x)}{x^2(1+x)}<0$

Il termine x^2 è sempre positivo <u>ma può annullarsi</u>.
Lo posso ancora eliminare, ma devo segnalare
la condizione $x \neq 0$ essendo tale termine al denominatore.
Quindi, scriverò:

$\frac{(2-3x)}{(1+x)}<0$ con $x \neq 0$ (il denominatore non può mai essere 0!)

e) $\frac{(2-3x)x^2}{(1+x)}<0$

Anche in questo caso scriverò: $\frac{(2-3x)}{(1+x)}<0$ con $x \neq 0$

in quanto x = 0 non può essere soluzione della disequazione: si avrebbe 0<0 (impossibile).Provare a sostituire…

f) $\frac{(2-3x)x^2}{(1+x)} \leq 0$

In questo caso scriverò: $\frac{(2-3x)}{(1+x)} \leq 0$, ma dovrò tenere conto anche della soluzione x = 0 che <u>andrà aggiunta</u> agli intervalli risolutivi se non compresa in essi.
(basta provare a sostituire: 0 = 0, accettabile)

Postilla

Quando saprete risolvere le disequazioni di secondo grado (tra qualche mese), non sarà necessario scomporre i trinomi di secondo grado. Si avranno perciò prodotti e rapporti di termini di primo e secondo grado A, B, C, D… e si procederà nel modo descritto sopra, facendo qualche scomposizione in meno.

Fate tanti esercizi…