DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Riprendiamo la definizione di derivata prima:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x} = f'(x)$$

Per un teorema sugli infinitesimi, esiste un intorno di x in cui il rapporto incrementale è uguale al limite più un infinitesimo α (x).

$$\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x} = f'(x)+\alpha(x)$$

dove $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$

Moltiplicando per Δx si ottiene per l'incremento della funzione Δf:

$$f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right) = \Delta f = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{1} + \underbrace{\alpha(x)\Delta x}_{2}$$

L'incremento della funzione è dato dalla somma di due infinitesimi per Δx che tende a 0 : 1 e 2.
Li confrontiamo per capire qual è l'infinitesimo di ordine superiore.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x)\Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x)}{f'(x)} = 0$$

Infatti α(x) tende a 0 per Δx che tende a 0, mentre la derivata in generale è un numero diverso da 0, esclusi punti particolari. Quindi 2 è infinitesimo di ordine superiore rispetto a 1 ed è trascurabile rispetto a 1. Pertanto 1 è detto **parte principale dell'incremento della funzione.**

Def. *Si dice differenziale di una funzione y = f(x) la parte principale dell'incremento della funzione, data dal prodotto della derivata prima per l'incremento della variabile indipendente.*

Si scrive: **df = f'(x)Δx**

Caso particolare: consideriamo la funzione f(x) = x (bisettrice del primo e terzo quadrante).

df = dx = 1 · Δx → **dx = Δx**

Il significato dei due termini è diverso, uno è un incremento dell'ordinata, l'altro dell'ascissa, ma coincidono, quindi d'ora in poi scriveremo sempre: **df = f'(x)dx .**

Da qui si deduce che la derivata può essere scritta anche come rapporto di differenziali: $f'(x) = \frac{df}{dx}$

DIFFERENZIALE SECONDO

$df = f'(x)\,dx$ è il differenziale primo

Il differenziale secondo è il differenziale del differenziale. Devo quindi calcolare la derivata del prodotto $f'(x)\,dx$ e moltiplicarla per dx.

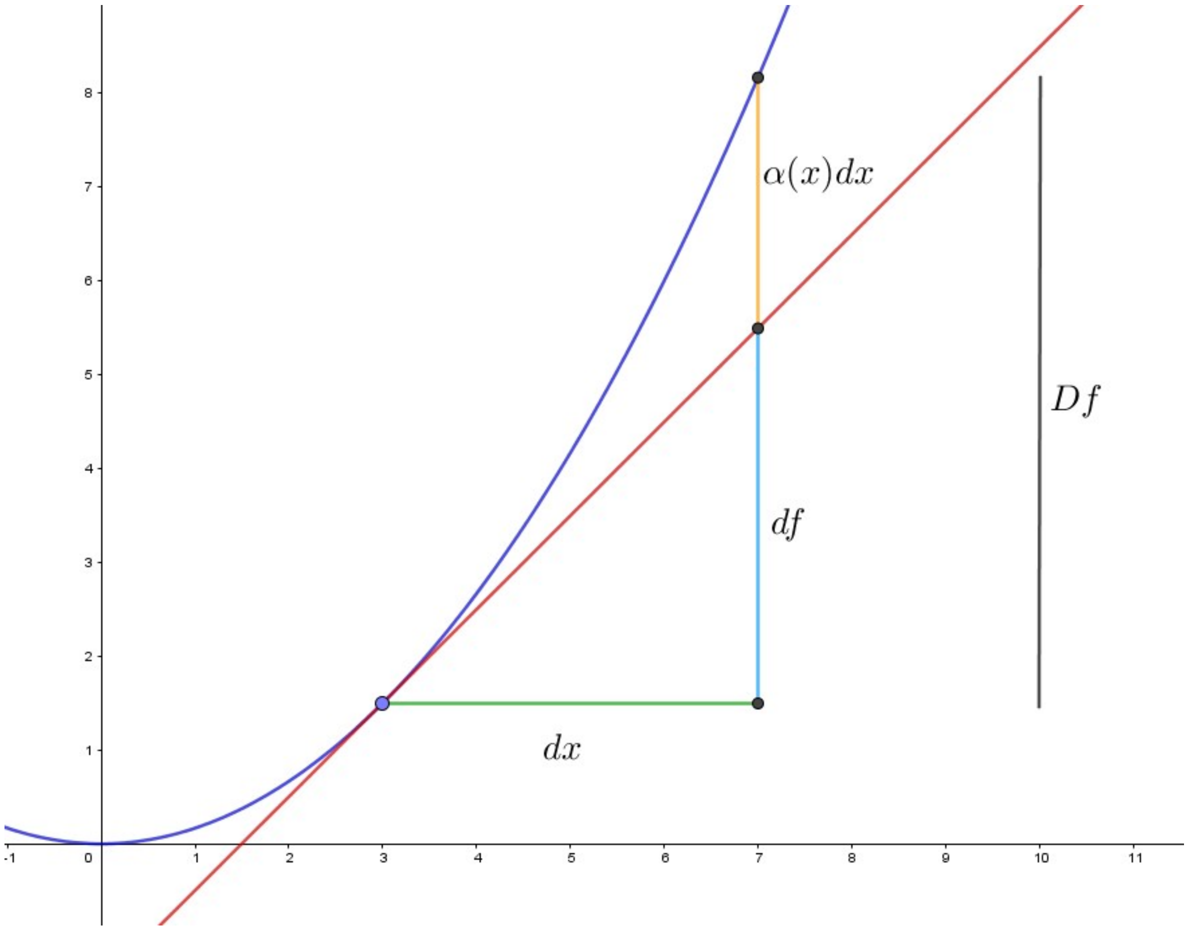
dx è da considerarsi una costante, è l'incremento fissato per la x.

$d^2 f = d\,(df) = D(f'(x)dx)\,dx = f''(x)\,dx^2$ da cui $$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Il 2 al numeratore è un indice mentre dx risulta effettivamente elevato al quadrato.

In generale $d^n f(x) = f^n(x)\,dx^n$ da cui $$f^n(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO



Il differenziale rappresenta l'incremento dell'ordinata valutato sulla retta tangente nel punto x anziché sulla funzione. Si vede dalla figura che, facendo tendere dx a 0, diminuiscono sia df sia l'infinitesimo α(x)dx, ma questo diminuisce in modo più significativo. Pertanto, se dx è molto piccolo, il differenziale approssima in modo soddisfacente l'incremento dell'ordinata sulla curva.