PARENTESI MATEMATICA

DALLA GEOMETRIA DIFFERENZIALE AI TENSORI

La geometria differenziale e, in particolare, la teoria delle superfici era stata fondata da Eulero, come una naturale conseguenza della nascita e dello sviluppo del calcolo differenziale. Infatti essa studia le proprietà geometriche, di curve e superfici, variabili da punto a punto (ad esempio la curvatura di una superficie bidimensionale qualsiasi), tali proprietà possono essere descritte solo con le tecniche del calcolo differenziale. Il termine "geometria differenziale" fu introdotto dal matematico italiano Luigi Bianchi alla fine dell'Ottocento.

Uno sviluppo decisivo dello studio della curvatura di una superficie bidimensionale si ebbe grazie all'opera di Gauss.

Le coordinate intrinseche di Gauss

Già Eulero aveva introdotto l'idea di descrivere una superficie bidimensionale mediante una coppia di parametri. Così come una curva può essere espressa in forma parametrica, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, una superficie potrà essere descritta da equazioni del tipo: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, dove x, y, z sono le coordinate cartesiane nello spazio R^3.

Gauss riprende questa idea cogliendo il vantaggio di poter descrivere le proprietà delle superfici mediante *coordinate intrinseche* alla superficie stessa. La superficie, pertanto, non è più pensata come immersa in uno spazio esterno R^3, ma si possono determinare la curvatura, le distanze tra i punti e altre proprietà geometriche, senza uscire dalla superficie.

Ad esempio, su una superficie sferica, latitudine e longitudine sono coordinate che possono essere determinate dall'interno della superficie stessa. Le proprietà della superficie diventano allora intrinseche alla superficie e indipendenti dal modo in cui essa è immersa nello spazio. La nuova geometria di Gauss viene esposta nel 1828 nelle *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

La grandezza fondamentale per definire una geometria è l' "elemento d'arco" cioè la minima distanza tra due punti (ad esempio: sul piano è la distanza euclidea, data dal teorema di Pitagora, su una superficie sferica è un arco di circonferenza massima). Su una superficie curva si dovrà procedere a calcolare le distanze per piccoli passi, approssimando localmente la superficie ad un piano.

Se l'espressione parametrica della superficie è:

$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$

si ottiene:

$dx = A\,du + A'\,dv, \quad dy = B\,du + B'\,dv, \quad dz = C\,du + C'\,dv$ (1)

dove A, A', B, B', C, C' sono in generale funzioni di u e v. La distanza tra due punti, calcolata localmente col teorema di Pitagora, è: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. (2)

Sostituendo le (1) nella (2), si ottiene:

$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2$

nota come "prima forma fondamentale".

Grazie all'elemento d'arco ds^2 è possibile calcolare la curvatura della superficie che viene espressa in ogni punto considerato da un numero e determinare le equazioni delle geodetiche, cioè le curve di minima distanza che connettono due punti tra loro.

Gauss dimostrò il *Theorema egregium*, così chiamato da lui stesso per la sua importanza.

"*Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet*", (*Disquisitiones generales circa superficies curvas).*

La curvatura, essendo una proprietà intrinseca alla superficie, rimane costante, comunque si immerga la superficie nello spazio: se due superfici hanno curvatura costante ed è possibile sovrapporre una superficie sull'altra mediante una trasformazione isometrica, allora le due superfici hanno la stessa curvatura; ad esempio, osservando che un cilindro è sviluppabile sul piano (si immagini un foglio di carta arrotolato in forma cilindrica, se lo si taglia è possibile incollarlo su un rettangolo di base uguale alla circonferenza di base del cilindro e altezza uguale all'altezza del cilindro), essendo la curvatura del piano nulla, si avrà come conseguenza che la curvatura del cilindro è anch'essa nulla. Non sarebbe possibile sviluppare una superficie sferica sul piano.

Gauss sviluppò ricerche su una nuova geometria che non soddisfaceva tutti i postulati di Euclide, ma non pubblicò mai i risultati. La geometria di Gauss fu poi chiamata "geometria iperbolica" da Bolyai e Lobacevskij, che ottennero indipendentemente gli stessi risultati intorno al 1830.

Gauss, Bolyai e Lobacevskij espressero tutti una comune idea in base alla quale la geometria del

mondo fisico non poteva essere stabilita a priori in base al senso comune, ma che dovesse essere fissata a posteriori, su base sperimentale. Gauss stesso, che si occupava anche di geodesia, provò a misurare la somma degli angoli di un ideale triangolo formato dalle cime di tre colline tedesche. La discrepanza dal valore 180° era davvero impercettibile.

L'assenza di indicazioni empiriche a favore delle geometrie non euclidee fece sì che a lungo queste venissero considerate astrazioni matematiche senza applicazione. L'approccio cambierà molto grazie all'opera di Riemann ma soprattutto con le teorie relativistiche di Einstein.

L'opera di Riemann

Nel 1854 Riemann pubblica un'opera che, partendo dal lavoro di Gauss, introduce importanti concetti nella geometria differenziale. Innanzitutto egli non si limita a trattare superfici bidimensionali ma generalizza le sue considerazioni a spazi n-dimensionali. Questi sono indubbiamente più difficili da visualizzare mentalmente, ma il matematico può permettersi di concepirli per analogia con altri enti più comuni e legati alla percezione.

Riemann chiama questi spazi n-dimensionali "*varietà* ", su queste varietà introduce sistemi di *n coordinate curvilinee*. Lo strumento matematico per lo studio delle varietà è la *metrica,* cioè la regola per calcolare le distanze tra i punti.

Riemann trovò la formula per calcolare l'*elemento lineare,* generalizzazione dell'elemento d'arco di Gauss. Si tratta ancora di una forma quadratica ds^2, data dalla somma di tutti i termini di secondo grado (con relativi coefficienti) ottenuti moltiplicando a 2 a 2 i differenziali delle coordinate (dx^2, dy^2, dx dy, dy dz, e così via):

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}dx_i dx_j$$

dove g_{ij} sono funzioni delle coordinate x_i.

L'insieme di tali funzioni sarà poi detto "*tensore metrico*".

In una varietà piatta, caso particolare, il tensore metrico, rappresentato in forma matriciale, è del tipo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ciò implica che l'elemento lineare ds^2 si riduce al teorema di Pitagora (metrica euclidea), comparendo solo i termini dx_i^2. In generale la matrice g_{ij} contiene tutti elementi non nulli che variano da punto a punto, essendo funzioni delle coordinate.

Dalla metrica si possono ancora ottenere, come nella geometria di Gauss, la curvatura punto per punto della varietà e le equazioni delle geodetiche. Con la metrica di Riemann si possono generare quindi infinite geometrie.

Anche per Riemann il fondamento della geometria dello spazio fisico era da cercarsi empiricamente, senza fermarsi alla percezione comune che è alle origini della geometria euclidea.

Per Riemann sono le forze fisiche a determinare la geometria dello spazio. Grande intuizione.

Le proprietà di una varietà riemanniana dovevano mantenersi invariate nel cambio del sistema di coordinate. Come noto, anche nella geometria euclidea, cambiando sistema di coordinate, cambiano le coordinate di due punti A e B, ma la loro distanza rimane la stessa.

Analogamente l'elemento lineare, la curvatura, la forma delle geodetiche dovevano mantenersi inalterati nel cambio di sistema di coordinate. Si parla di *invarianti differenziali*.

Il calcolo differenziale assoluto di Ricci

Il matematico italiano Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925), grazie al cui lavoro si può ben dire che Einstein poté formalizzare la teoria della relatività generale, si dedicò allo studio delle forme differenziali quadratiche, partendo anche dall'osservazione che tali forme comparivano, mostrando evidenti analogie, in geometria, analisi e fisica.

Egli cerca di classificarle e studiarne a fondo le proprietà, in particolare le proprietà di invarianza. Verso la fine degli anni Ottanta del XIX secolo arriva a definire un nuovo oggetto matematico: il *tensore*, che egli stesso definisce come "*un insieme di funzioni matematiche (le componenti del tensore) che si trasformano al variare delle coordinate secondo leggi precise* ". Stabilisce infatti regole precise di trasformazione delle componenti dei tensori, tra cui il tensore metrico di cui sopra, introducendo anche un nuovo tipo di derivata, la *derivata covariante*.

Tale tecnica di derivazione fa sì che la derivata di un tensore sia ancora un tensore.

In generale un tensore, nel cambio di coordinate, non si trasforma in sé stesso. Vale però una proprietà fondamentale che fece intuire subito allo stesso Ricci come il calcolo tensoriale si prestasse particolarmente alla formulazione delle leggi fisiche. Infatti se due tensori sono uguali in un sistema di coordinate, i loro trasformati in un altro sistema di coordinate lo sono ancora.

Se nel sistema Xi: T = S, nel sistema X'i: T' = S'. Si dice allora che l'equazione è covariante.

E' chiaro che in una teoria relativistica, dove le leggi fisiche devono avere forma matematica equivalente in tutti i sistemi di riferimento, l'utilizzo dei tensori si rivela utilissimo.

Einstein va a ripetizione di matematica

Einstein aveva potuto scrivere senza difficoltà tecniche la teoria della Relatività Ristretta, si imbatté invece in guai seri nel tentativo di formalizzare la teoria della Relatività Generale, proprio in quanto lo spaziotempo da essa descritto era uno spaziotempo curvo. Informato della nuova creazione matematica, "il calcolo tensoriale", ne intuì immediatamente le potenzialità. Si rivolse quindi all'amico matematico Marcel Grossman chiedendo lumi. Trattandosi di tecniche di calcolo non banali, in pratica chiese a Grossman di studiare l'argomento e insegnargli quanto gli sarebbe servito per i suoi scopi. Einstein studiò per due o tre anni matematica e finalmente poté pervenire, non senza fatica, alla stesura delle equazioni della Relatività Generale che videro la luce nel novembre 1915. Eccole come furono mostrate all'Accademia prussiana delle Scienze:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein o tensore gravitazionale, esso è definito mediante: $R_{\mu\nu}$, tensore di curvatura o di Ricci, $g_{\mu\nu} = g_{ij}\, dx_i\, dx_j$, detto tensore metrico (esso rappresenta sia la metrica sia il potenziale gravitazionale), R, scalare di curvatura.

Il tensore $T_{\mu\nu}$ è detto *tensore materia-energia* e contiene le "sorgenti", cioè tutti quegli enti fisici che, possedendo energia, possono curvare lo spaziotempo (ad esempio le masse o le cariche elettriche o un campo elettromagnetico).

Il calcolo tensoriale, sviluppato dai matematici italiani Ricci, Bianchi, Levi-Civita, è uno strumento potentissimo, elegante, sintetico, che è oggi utilizzato largamente nella fisica teorica.

La prima applicazione del calcolo tensoriale, che ne decretò la fortuna, fu senza dubbio quella di Einstein alla Relatività Generale; sarebbe giusto che anche Gregorio Ricci Curbastro (con gli altri grandi matematici che lo precedettero o accompagnarono su quella strada) venisse ricordato per questo contributo essenziale alla stesura della teoria einsteiniana della gravitazione.

Bibliografia:

M.Kline, Storia del pensiero matematico, Ed. Einaudi, 1991

F.Toscano, Il genio e il gentiluomo, Ed. Sironi, 2004