Riferito il piano a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si chiama **conica** *una curva* γ *che ammette un'equazione di secondo grado*[1]:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{1}$$

con coefficienti reali.

Vediamo, prima di tutto, come variano i coefficienti dell'equazione (1) di γ, al cambiare degli assi coordinati.

Operiamo una *traslazione d'assi*, definita dalle relazioni:

$$x = X + h, \qquad y = Y + k. \tag{2}$$

Dalla (1), mediante la (2), si ottiene l'equazione di γ nel nuovo sistema di riferimento:

$$a(X+h)^2 + 2b(X+h)(Y+k) + c(Y+h)^2 + 2d(X+h) + 2e(Y+k) + f = 0.$$

Da questa, eseguendo i calcoli indicati e riducendo i termini simili, si deduce l'equazione:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0, \tag{3}$$

dove:

$$\begin{cases} A = a; \\ B = b; \\ C = c; \\ D = ah + bk + d; \\ E = bh + ck + e; \\ F = ah^2 + 2bhk + ck^2 + 2dh + 2ek + f. \end{cases} \tag{4}$$

Eseguendo invece una *rotazione d'assi*, definita dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases} \tag{5}$$

si ottiene dalla (1) ancora un'equazione del tipo (3), i cui coefficienti sono:

$$\begin{cases} A = a\cos^2\alpha + 2b\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + c\,\mathrm{sen}^2\alpha; \\ 2B = -2a\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha + 2b(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) + 2c\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha = (c-a)\mathrm{sen}2\alpha + 2b\cos 2\alpha; \\ C = a\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\cos^2\alpha; \\ D = d\cos\alpha + e\,\mathrm{sen}\,\alpha; \\ E = -d\,\mathrm{sen}\,\alpha + e\cos\alpha; \\ F = f. \end{cases} \tag{6}$$

Dalle (4) e (6) si verifica senza difficoltà[2] che [sia nel caso in cui si esegua la traslazione d'assi (2), sia nel caso in cui si esegua la rotazione (5)], risulta:

$$a + c = A + C; \tag{7}$$

$$ac - b^2 = AC - B^2, \qquad \text{cioè:} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}; \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Le (7), (8) e (9) sussistono anche se il cambiamento del sistema cartesiano si riduce a invertire l'orientamento di uno degli assi.

---

(1) Abbiamo indicato i coefficienti di xy, x, y, non con b, d, e, ma con $2b$, $2d$, $2e$ per semplificare la scrittura di formule successive.

(2) Anche se i calcoli sono laboriosi.

Pertanto *il valore delle espressioni*:

$$I_1 = a + c, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

formate con i coefficienti dell'equazione (1) *della curva* γ, **resta inalterato** *quando si esegua un qualunque cambiamento d'assi,* il quale è o una traslazione, o una rotazione, o l'inversione dell'orientamento di uno degli assi, oppure il prodotto di due (o più) delle suddette trasformazioni elementari. *Le tre espressioni* I_1, δ *e* Δ *prendono il nome, rispettivamente, di* **invariante lineare, invariante quadratico, invariante cubico del polinomio**:

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

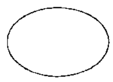
3

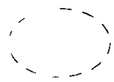
Lo studio dell'equazione (1) si fonda sul seguente teorema, dovuto sostanzialmente a EULERO e che ci limitiamo a enunciare[1]:

Scegliendo in modo opportuno il sistema di coordinate cartesiane ortogonali, un'equazione di secondo grado in due variabili:

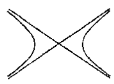
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{10}$$

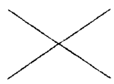
si può sempre ridurre a una delle forme canoniche seguenti (α, β, p **non nulli):**

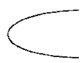
1) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} + \dfrac{y'^2}{\beta^2} - 1 = 0.$ *Ellisse* 

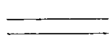
2) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} + \dfrac{y'^2}{\beta^2} + 1 = 0.$ «*Ellisse immaginaria*» 

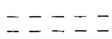
3) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} + \dfrac{y'^2}{\beta^2} = 0.$ *Punto* 

4) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} - \dfrac{y'^2}{\beta^2} - 1 = 0.$ *Iperbole* 

5) $\dfrac{x'^2}{\alpha^2} - \dfrac{y'^2}{\beta^2} = 0.$ *Coppia di rette incidenti* 

6) $y'^2 - 2px' = 0.$ *Parabola* 

7) $x'^2 - \alpha^2 = 0.$ *Coppia di rette parallele* 

8) $x'^2 + \alpha^2 = 0.$ *Coppia di «rette immaginarie» parallele* 

9) $x'^2 = 0.$ *Coppia di rette coincidenti*

[1] La dimostrazione di questo teorema si trova su qualsiasi testo universitario di Geometria Analitica.

Delle equazioni canoniche elencate, le 1), 4) e 6) sono già note: sono le equazioni canoniche, rispettivamente dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola.

Le equazioni 2) e 8) non sono verificate da alcun punto. L'aggettivo «*immaginario*» viene giustificato da considerazioni alle quali non crediamo opportuno accennare.

La 3) è soddisfatta solo da $x' = 0$ e $y' = 0$, cioè da un solo punto, l'origine delle coordinate.

L'equazione 5) si può scrivere come:

$$\left(\frac{x'}{\alpha} - \frac{y'}{\beta}\right)\left(\frac{x'}{\alpha} + \frac{y'}{\beta}\right) = 0;$$

è chiaro che essa è soddisfatta da tutti e soli i punti per cui almeno uno dei fattori di primo grado è eguale a zero; è chiaro cioè che la curva rappresentata dall'equazione è l'insieme di queste due rette incidenti.

Analogamente, l'equazione 7), ci dà:

$$(x' - \alpha) \cdot (x' + \alpha) = 0,$$

cioè la curva corrispondente è la coppia di rette parallele $x' = \alpha$ e $x' = -\alpha$.

Infine, la 9) è un caso particolare (limite) della 7), quando $\alpha = 0$, cioè è una coppia di rette coincidenti.

Osservazione

Le coniche del tipo 5), 7), 9), essendo spezzate in rette, si dicono **degeneri**.

Una conica del tipo (2) non è degenere, ma non possiede punti reali; perciò viene detta *immaginaria*.

Una conica del tipo 8) è *degenere* in rette immaginarie.

Pertanto, *le sole coniche che siano reali* (*dotate di infiniti punti reali*) *e non degeneri sono le ellissi, le iperboli e le parabole.*

Dall'esame delle forme canoniche 3), 5), 7), 8) e 9) che rappresentano le *coniche degeneri*, risulta che in ogni caso è:

$$\Delta = 0.$$

Da qui si deduce che vale il seguente:

TEOREMA 1°

Una conica di equazione:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{10}$$

è degenere se, e solo se, il suo invariante cubico Δ, dato dalla (9), **è eguale a zero.**

Infatti, passando (con un cambiamento di coordinate cartesiane ortogonali) dall'equazione (10) ad una delle forme canoniche 3), 5), 7), 8) e 9), l'invariante Δ non cambia di valore; quindi se è nullo per la forma canonica lo è anche per l'equazione (10) di partenza e per qualunque altra equazione ottenuta moltiplicando i coefficienti della (10) per un fattore costante $k \neq 0$; e viceversa.

Dall'esame delle forme 1), 2), 4), 6) relative a *coniche non degeneri*, risulta, prima di tutto, $\Delta \neq 0$, e inoltre:

Per l'ellisse: $\delta = \dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \dfrac{1}{\beta^2} > 0;$

Per l'iperbole: $\delta = -\dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \dfrac{1}{\beta^2} < 0;$

Per la parabola: $\delta = 0.$

Poiché il segno di δ non cambia passando all'equazione (10) ad una forma canonica (e inoltre non cambia anche se si moltiplicano i coefficienti della (10) per una stessa costante $k \neq 0$), possiamo concludere che vale il seguente:

TEOREMA 2°

Se la conica (10) è non degenere ($\Delta \neq 0$), allora essa è:

Un'ellisse (reale o immaginaria),	**se**	$\delta > 0.$
Un'iperbole,	**se**	$\delta < 0.$
Una parabola,	**se**	$\delta = 0.$

Sussiste, infine, il seguente teorema, di non facile dimostrazione, e che perciò ci limitiamo a enunciare:

TEOREMA 3°

- **La conica (10), qualora sia reale e non degenere, è un'iperbole equilatera se, e solo se, risulta:**
$$I_1 = a + c = 0.$$
- **Un'ellisse è reale se risulta:** $I_1\Delta < 0,$
- **ed è immaginaria, se risulta:** $I_1\Delta > 0.$

Possiamo riassumere i teoremi enunciati nel seguente schema:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	*Ellisse* — *reale* ($I_1\Delta < 0$) *Ellisse* — *immaginaria* ($I_1\Delta > 0$)	*Punto*
$\delta < 0$	*Iperbole.* Se inoltre: $I_1 = 0$: *iperbole equilatera*	*Rette incidenti* Se inoltre: $I_1 = 0$: *rette perpendicolari*
$\delta = 0$	*Parabola*	*Rette parallele* (reali o immaginarie)

4

Sia data una conica di equazione:

(1) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

DEFINIZIONE

Si chiama centro della conica il punto del piano, se esiste, rispetto al quale la conica è simmetrica; cioè l'eventuale centro di simmetria della conica.

Le coniche che hanno il centro si dicono **coniche a centro**.
Sussiste il seguente:

Un punto $S(x_0, y_0)$ è il centro della conica di equazione (1) se, e solo se, le coordinate di S soddisfano il sistema:

(2)
$$\begin{matrix} D \\ E \end{matrix} \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0. \end{cases}$$

Infatti, essendo $S(x_0, y_0)$ centro di simmetria, la (1) nella nuova forma deve avere $D = 0$ ed $E = 0$, cioè [v. (4), n. 2]:

$$ax_0 + by_0 + d = 0, \qquad bx_0 + cy_0 + e = 0.$$

Questo sistema è determinato se, e solo se:

(3)
$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0. \quad \text{no parabola}$$

Verificata la condizione (3), risolvendo il sistema (2) si trovano le coordinate del centro S della conica.
Individuato $S(x_0, y_0)$, con la traslazione:

(4)
$$x = X + x_0 \quad \text{e} \quad y = Y + y_0,$$

(che corrisponde alla traslazione che trasporta l'origine nel centro di simmetria) la (1) assume la forma[1]:

(5)
$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0,$$

dove:

(6)
$$F = dx_0 + ey_0 + f = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Se, invece, è $\delta = 0$, allora la conica o non ha centro, se il sistema (2) è impossibile, oppure ne ha infiniti, se il sistema (2) è indeterminato (v. n. 6).

○ *Per esempio, verificare che l'equazione:*

(1)
$$\underset{a}{3x^2} \underset{b=-3}{- 6xy} + \underset{c}{2y^2} \underset{d=-2}{- 4x} + \underset{e=1}{2y} + \underset{f=1}{1} = 0,$$

rappresenta una conica a centro e trasformare l'equazione con una traslazione d'assi la cui nuova origine è il centro della conica.

La conica è a centro, perché:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3 \neq 0. \quad \text{iperbole}$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x - 3y - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 1 = 0, \end{cases} \qquad \text{si trova:} \qquad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{3} \\ y_0 = -1, \end{cases}$$

---

[1] Essendo $ax_0 + by_0 + d = 0$ e $bx_0 + cy_0 + e = 0$, risulta:
$F = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f = x_0(ax_0 + by_0 + d) + y_0(bx_0 + cy_0 + e) + dx_0 + ey_0 + f = 0 + 0 + dx_0 + 2y_0 + f.$

che sono le coordinate del centro. Con la sostituzione:

$$x = X - \frac{1}{3}, \qquad y = Y - 1,$$

la (1), dopo facili calcoli diventa:

$$(2) \qquad 3X^2 - 6XY + 2Y^2 + \frac{2}{3} = 0 \qquad \text{cioè:} \qquad 9X^2 - 18XY + 6Y^2 + 2 = 0.$$

La (2) poteva ottenersi direttamente dalla (1), ricordando che è:

$$A = a, \qquad B = b, \qquad C = c, \qquad F = dx_0 + ey_0 + f = \frac{\Delta}{\delta},$$

come lo studente può subito verificare.

5

Nel numero precedente, abbiamo visto che, data una conica a centro:

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

e determinato il centro (x_0, y_0), con la sostituzione:

$$x = X + x_0, \qquad y = Y + y_0,$$

si giunge all'equazione:

$$(2) \qquad aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0.$$

Una ulteriore semplificazione dell'equazione (2), si ha con la seguente trasformazione delle coordinate:

$$(3) \qquad \begin{cases} X = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ Y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha, \end{cases}$$

che corrisponde a una rotazione d'assi di un angolo α.

Scegliamo α in modo che risulti, a trasformazione avvenuta, $b' = 0$.

Dalla (6) del n. 2, deve allora essere:

$$(c-a)\operatorname{sen} 2\alpha + 2b \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2(c-a)\operatorname{sen}\alpha \cos a + 2b(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c-a)\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + b\cos^2\alpha - b\operatorname{sen}^2\alpha = 0.$$

Dividendo ambo i membri per $-\cos^2\alpha$, si ottiene l'equazione:

$$(4) \qquad b\operatorname{tg}^2\alpha - (c-a)\operatorname{tg}\alpha - b = 0.$$

Per i valori di α per i quali vale la (4), allora l'equazione della curva, nelle nuove coordinate, assume la forma:

$$(5) \qquad a'x'^2 + c'y'^2 + F = 0.$$

Tenendo conto che I_1 e δ sono invarianti, si ottiene una notevole relazione tra i coefficienti dell'equazione (1) e della (5):

$$b=0 \quad \boxed{\begin{cases} a'c' = ac - b^2 \\ a' + c' = a + c, \end{cases}} = \delta \tag{6}$$

con la quale si possono ottenere i coefficienti a' e c', senza operare le trasformazioni delle coordinate (4) del n. 4 e delle (3) di questo numero, dopo avere trovato, con la (4), $\operatorname{tg}\alpha$ e con essa:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

1 *Scrivere sotto forma canonica l'equazione:*

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0. \tag{1}$$

Essendo:

$$I_1 = a + c = 13; \quad \delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -81; \quad I_1\Delta = 13(-81) < 0,$$

la (1) rappresenta un'*ellisse reale*:
Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 4 = 0 \\ 2x + 8y + 7 = 0, \end{cases} \qquad \text{si ottiene:} \qquad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\[2mm] y_0 = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Operando la traslazione di equazione: $x = X - \frac{1}{2}$ e $y = Y - \frac{3}{4}$, si ha:

$$5X^2 + 4XY + 8Y^2 - \frac{9}{4} = 0. \tag{2}$$

Compiamo ora una rotazione di un angolo α, tale che:

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0, \qquad \text{da cui:} \qquad \operatorname{tg}\alpha = 2, \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Si noti che i valori trovati di $\operatorname{tg}\alpha$, corrispondono a due direzioni fra loro perpendicolari. Per questo, prendendo $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$ non si fa altro che scambiare i ruoli degli assi X e Y.

Prendendo $\operatorname{tg}\alpha = 2$, si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Prendendo i valori positivi di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, si hanno le formule di rotazione:

$$\begin{cases} X = \dfrac{x'}{\sqrt{5}} - \dfrac{2y'}{\sqrt{5}} \\[2mm] Y = \dfrac{2x'}{\sqrt{5}} + \dfrac{y'}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Con queste formule, la (2) diventa:

$$9x'^2 + 4y'^2 = \frac{9}{4}, \qquad \text{cioè:} \qquad \frac{x'^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{9}{16}} = 1.$$

Oppure, più semplicemente, tenendo presenti le (6), si ha subito, a partire dalla (1):

$$\begin{cases} a'c' = ac - b^2 = 36 \\ a' + c' = a + c = 13, \end{cases}$$

che è un sistema simmetrico la cui equazione risolvente è:

$$t^2 - 13t + 36 = 0,$$

che, risolta dà:

$$\begin{cases} a' = 9 \\ c' = 4, \end{cases} \qquad \text{oppure:} \qquad \begin{cases} a' = 4 \\ c' = 9. \end{cases}$$

Inoltre è: $F = \dfrac{\Delta}{\delta} = -\dfrac{81}{36} = -\dfrac{9}{4}$.

Pertanto si ha subito:

$$9x'^2 + 4y'^2 - \frac{9}{4} = 0,$$

che è l'equazione prima trovata.

Ridurre a forma canonica l'equazione: $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4y + 4y + 12 = 0$.

Qui è $\delta = 9 > 0$.

Procedendo come nell'esempio precedente, e lo studente sviluppi i calcoli per esercizio, l'equazione data si riduce alla forma:

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = -1,$$

che è un'ellisse «*immaginaria*».

Così pure:

a) l'equazione: $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ ($\delta = 9 > 0$), si riduce a:

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 0, \text{ che si riduce al solo punto } (0,0);$$

b) *l'equazione*: $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 16x + 16y + 16 = 0$ ($\delta = -16 < 0$), si riduce a $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{1} = 0$, che è un iperbole degenere nelle due rette:

$$x' - 2y' = 0; \qquad x' + 2y' = 0.$$

Se la
equazione:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

è tale
che risulta:

$$\delta = ac - b^2 = 0,$$

la conica
rappresentata dalla (1) o non ha centro, oppure ne ha infiniti.

In ogni caso si semplifica la forma della (1) con una rotazione degli assi coordinati:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y \operatorname{sen}\alpha \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases}$$

dove l'angolo α è determinato, risolvendo l'equazione:

$$\text{(3)} \qquad b\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - (c-a)\mathrm{tg}\,\alpha - b = 0.$$

Nelle nuove coordinate, l'equazione (1) si riduce alla forma:

$$\text{(4)} \qquad AX^2 + 2DX + 2EY + f = 0,$$

dove $A \neq 0$, oppure alla forma:

$$\text{(5)} \qquad CY^2 + 2DX + 2EY + f = 0,$$

dove $C \neq 0$.

Le equazioni (4) o (5) possono poi, eventualmente, essere ridotte alla forma $y' = kx^2$, $x' = hy^2$, con una traslazione d'assi.

ESEMPI

1 *Scrivere sotto forma canonica l'equazione*:

$$\text{(1)} \qquad x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Essendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

la conica non è a centro. Per la (3), si ha:

$$-\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = 0, \qquad \text{da cui:} \qquad \alpha = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Prendendo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, si hanno le formule di rotazione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y, \end{cases}$$

tramite le quali, la (1) diventa:

$$\text{(2)} \qquad 2Y^2 - 8\sqrt{2}X + 2\sqrt{2}Y + 25 = 0.$$

Con la «*solita*» traslazione (Vol. I, Cap. I) la (2) si può anche scrivere:

$$Y^2 = 4\sqrt{2}X,$$

che è l'equazione di una parabola.

2 *Ridurre a forma canonica l'equazione*: $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$.

Procedendo come nell'esempio precedente, e lo studente sviluppi i calcoli, si trova:

- $\delta = 0$;
- $\operatorname{tg}\alpha = 2$; ruotando gli assi di un angolo α si ha:

$$5y'^2 - 2\sqrt{5}\,y' - 3 = 0 \;\Rightarrow\; 5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 4 = 0,$$

che posto $Y = y' - \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ si riduce a $5Y^2 - 4 = 0$.

L'equazione data «*degenera*» in una coppia di rette parallele, di equazioni:

$$\sqrt{5}Y + 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{5}Y - 2 = 0,$$

nell'ultimo sistema di coordinate.