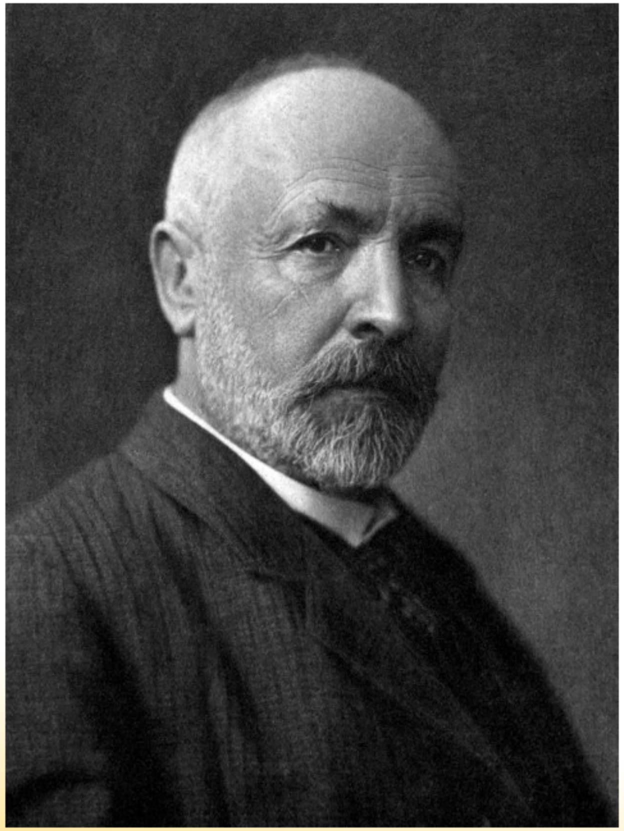
Cantor e i numeri transfiniti

$$\aleph$$



Georg Cantor

1845-1918

Nel 1873 il matematico tedesco Georg Cantor intraprese una ricerca che lo avrebbe condotto a due esiti importanti: la teoria degli insiemi e l’introduzione dei numeri transfiniti (come lui chiamava gli infiniti).

Da allora la teoria degli insiemi è diventata parte essenziale di qualsiasi corso di matematica.

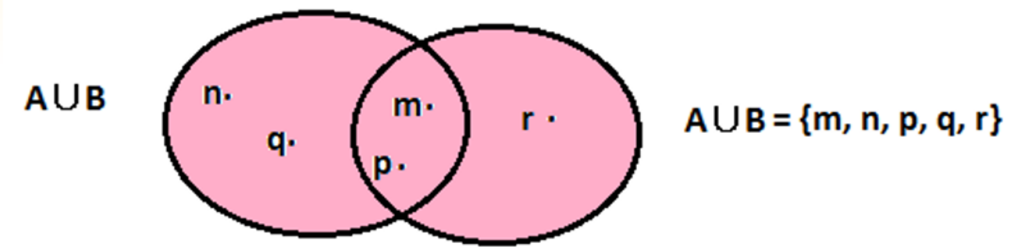
Come disse Hilbert: «Nessuno ci scaccerà mai dal paradiso che Cantor ha creato per noi».

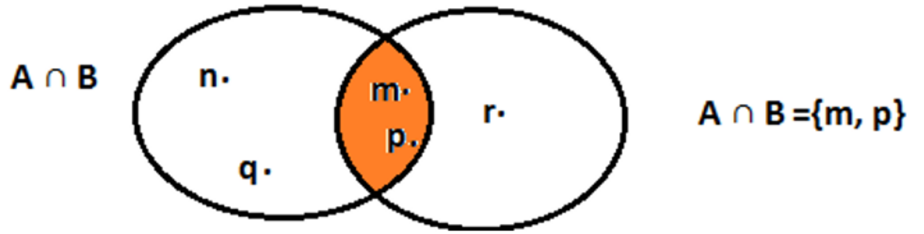
La definizione di insieme

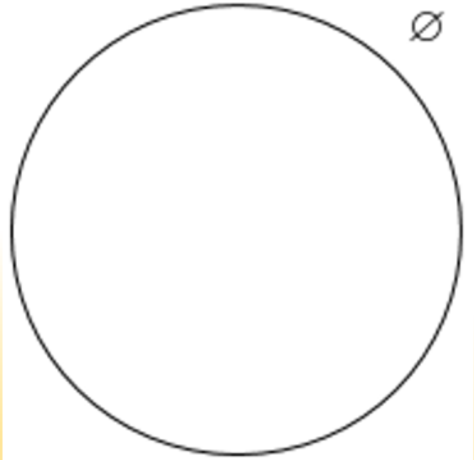
Informalmente, un insieme è una qualsiasi collezione di oggetti: possono essere numeri, triangoli, superfici di Riemann, qualunque cosa.

Gli insiemi si possono combinare in vari modi: per esempio, l'unione di due insiemi è ciò che si ottiene facendone uno solo, mentre l'intersezione comprende gli elementi che hanno in comune.

Usando gli insiemi possiamo definire concetti di base come le funzioni e le relazioni. Possiamo costruire i sistemi numerici come gli interi, i razionali, i reali e i complessi a partire da costituenti più semplici.



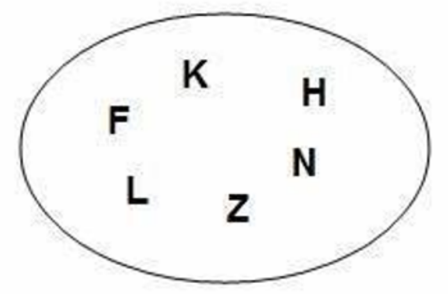


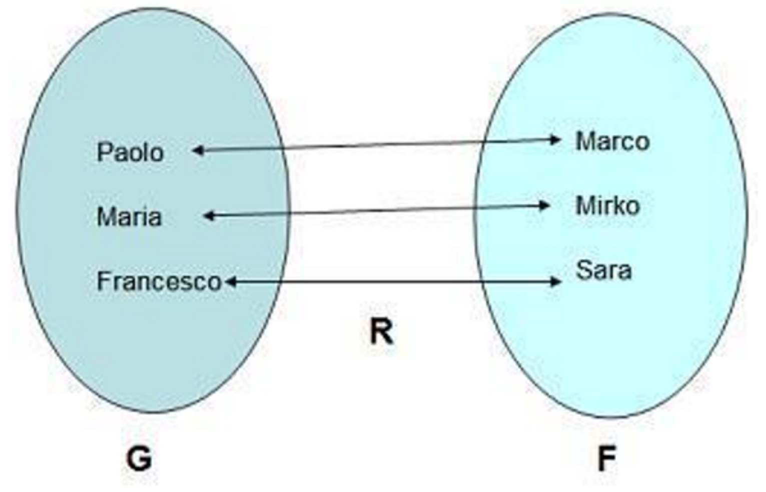


La cardinalità…

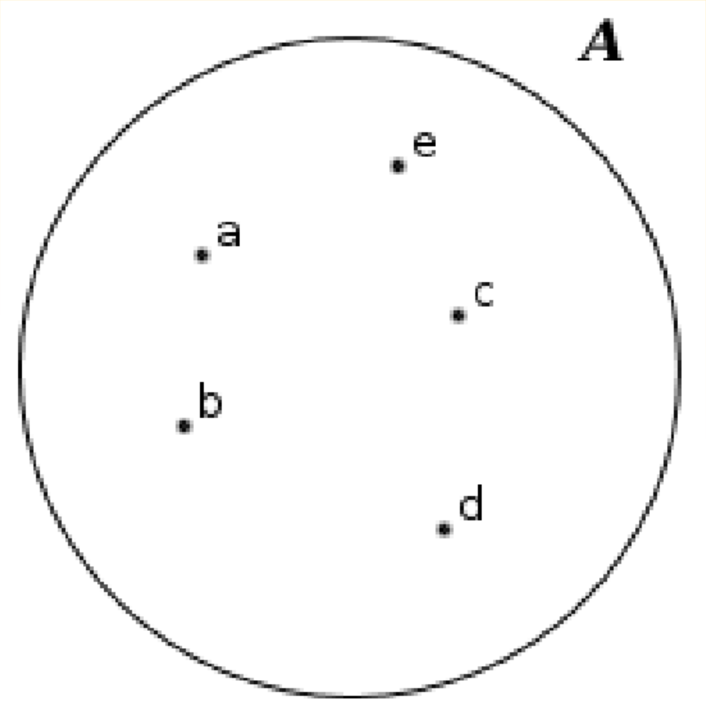
La cardinalità di un insieme è il numero di elementi che quell'insieme contiene. Se immaginiamo l'insieme come un cassetto, se quel cassetto contiene 10 cose, allora diciamo che la cardinalità dell'insieme vale 10. Potremmo quindi affermare che la cardinalità rappresenta la 'grandezza' di un insieme.

Risulta, invece, molto meno semplice "contare" il numero di elementi per insiemi infiniti.

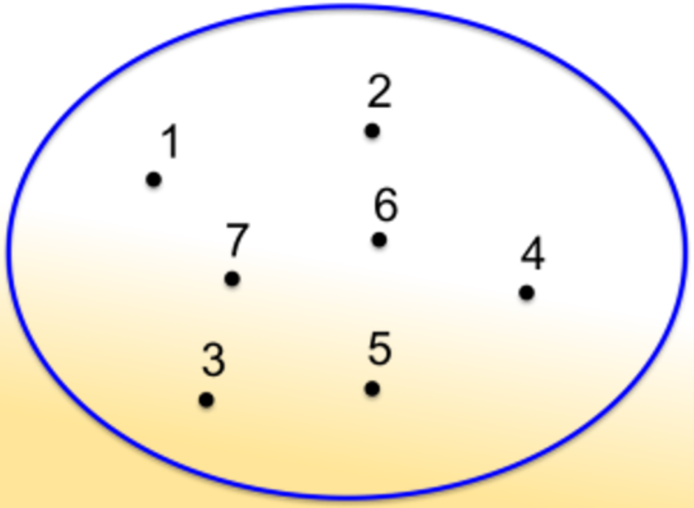




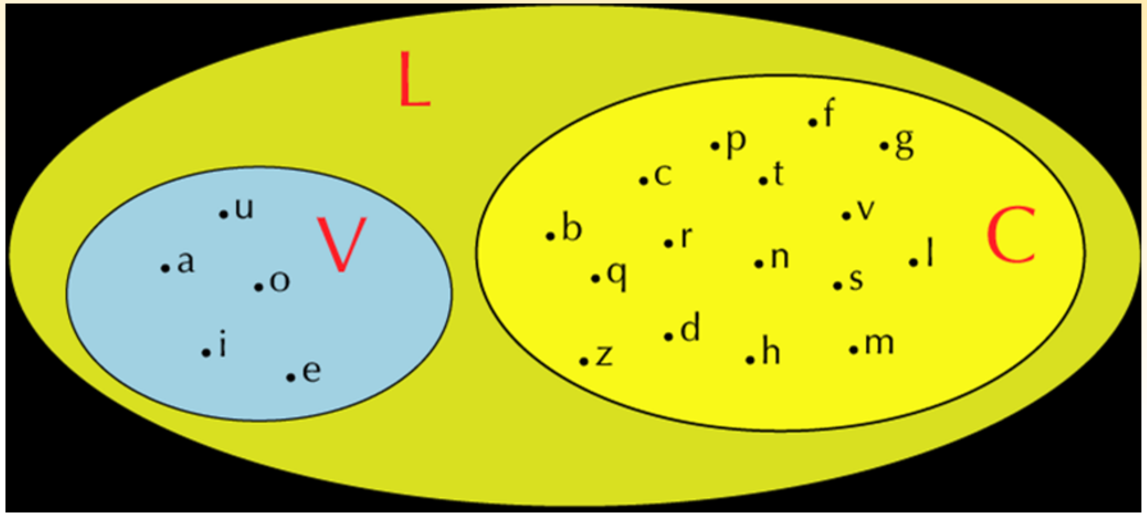
Insiemi finiti



Negli insiemi finiti la cardinalità equivale ad un numero. Per esempio, considerato l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano, la cardinalità di quell'insieme sarà 21.

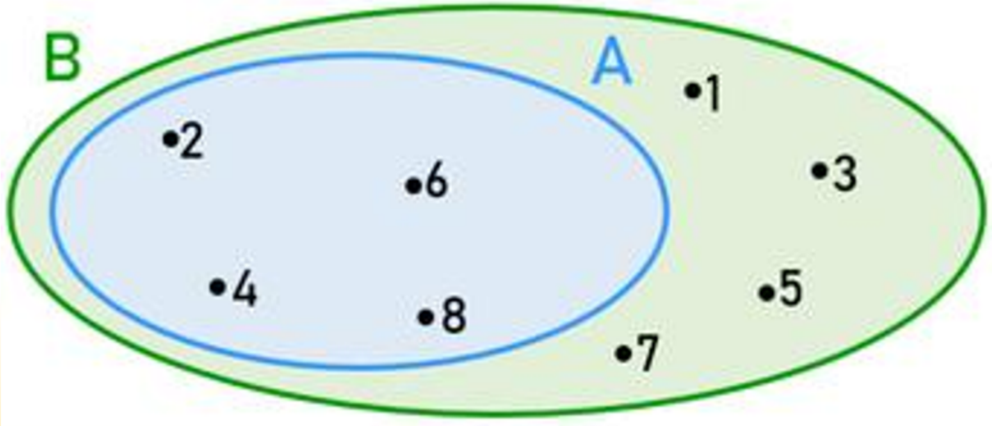


I sottoinsiemi di insiemi finiti avranno sempre una cardinalità minore rispetto a quello che li contiene. Per esempio, l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano ha una cardinalità maggiore rispetto a quello delle vocali:



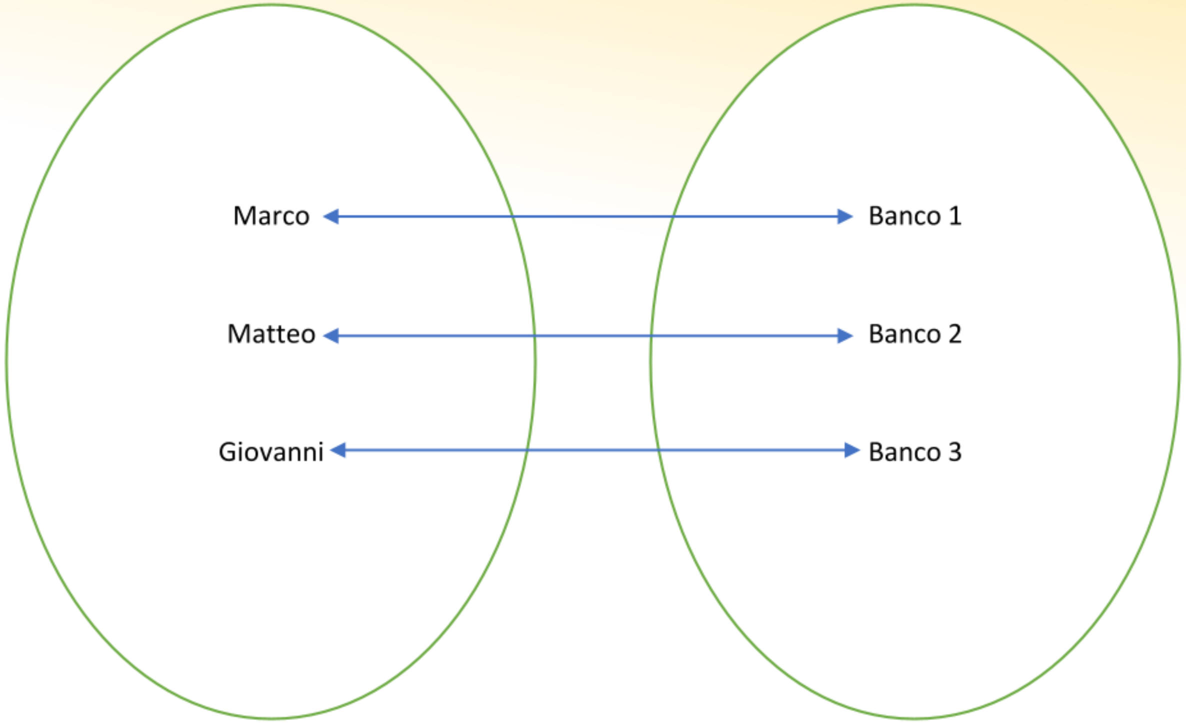
cardinalità 5 < cardinalità 21

Due insiemi hanno la stessa cardinalità se è possibile instaurare una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi.



Per due insiemi finiti, è facile capirlo:
ad esempio tra gli studenti di una classe e i loro banchi c’è una corrispondenza biunivoca.

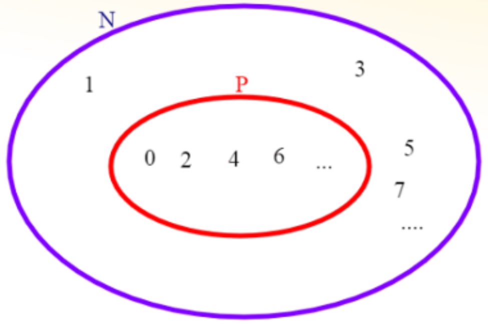
Ogni numero naturale rappresenta la cardinalità di tutti gli insiemi equipotenti che hanno quello stesso numero di elementi.



Insiemi infiniti

Per gli insiemi infiniti il concetto di cardinalità riserva qualche sorpresa.

Cantor introdusse i *numeri transfiniti* per esprimere la cardinalità degli insiemi infiniti, avendo dimostrato che non tutti gli infiniti sono uguali.



Cantor utilizzò la prima lettera dell’alfabeto ebraico per indicare la cardinalità degli insiemi infiniti.

Ad esempio l’insieme dei numeri naturali ha la potenza del *numerabile,* che viene associata al numero transfinito $\aleph_0$ (Alef null).

Già Galilei aveva evidenziato che si possono associare in modo biunivoco i numeri naturali con i loro quadrati.

Accade quindi un fatto strano: un insieme infinito può essere grande quanto un suo sottoinsieme.

L’insieme Z

Si può costruire facilmente una corrispondenza biunivoca tra N e Z, ad esempio, abbinando i numeri dispari N ai positivi Z e i numeri pari N ai negativi Z.

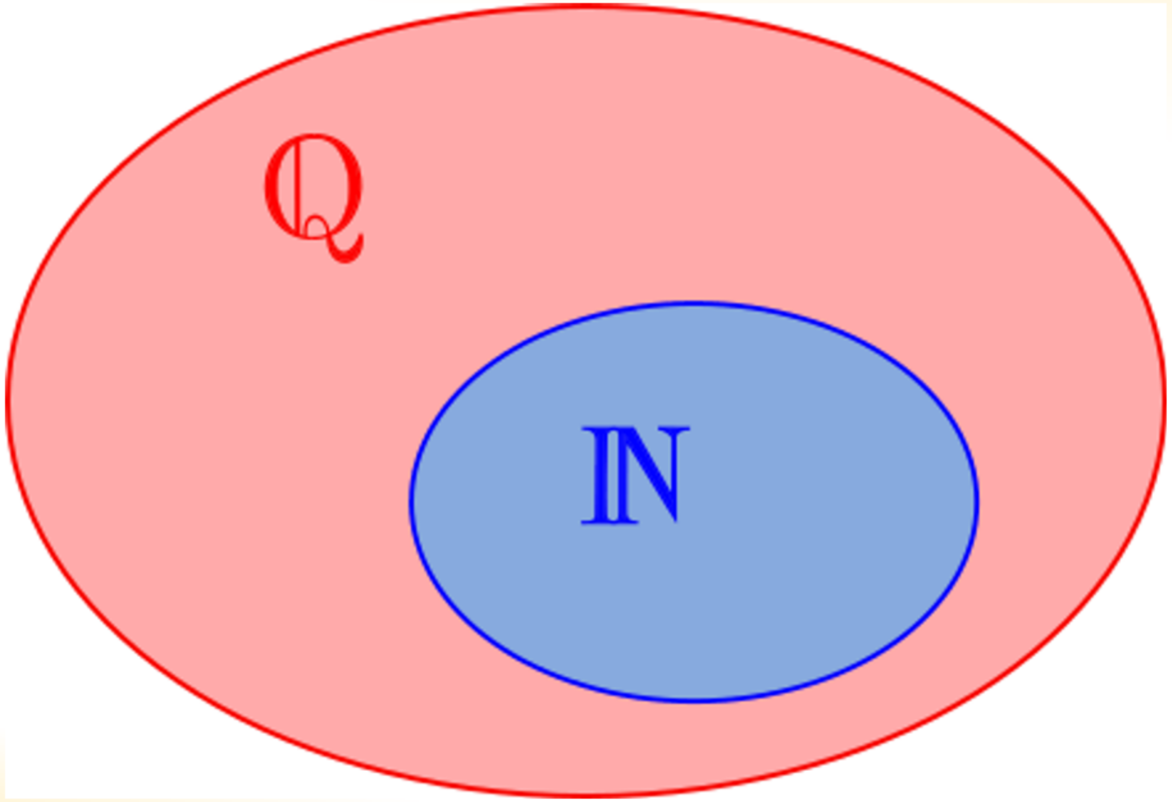
1	2	3	4	5	6
↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	-1	2	-2	3	-3

Quindi Z ha la potenza del numerabile, come N.

L’insieme Q

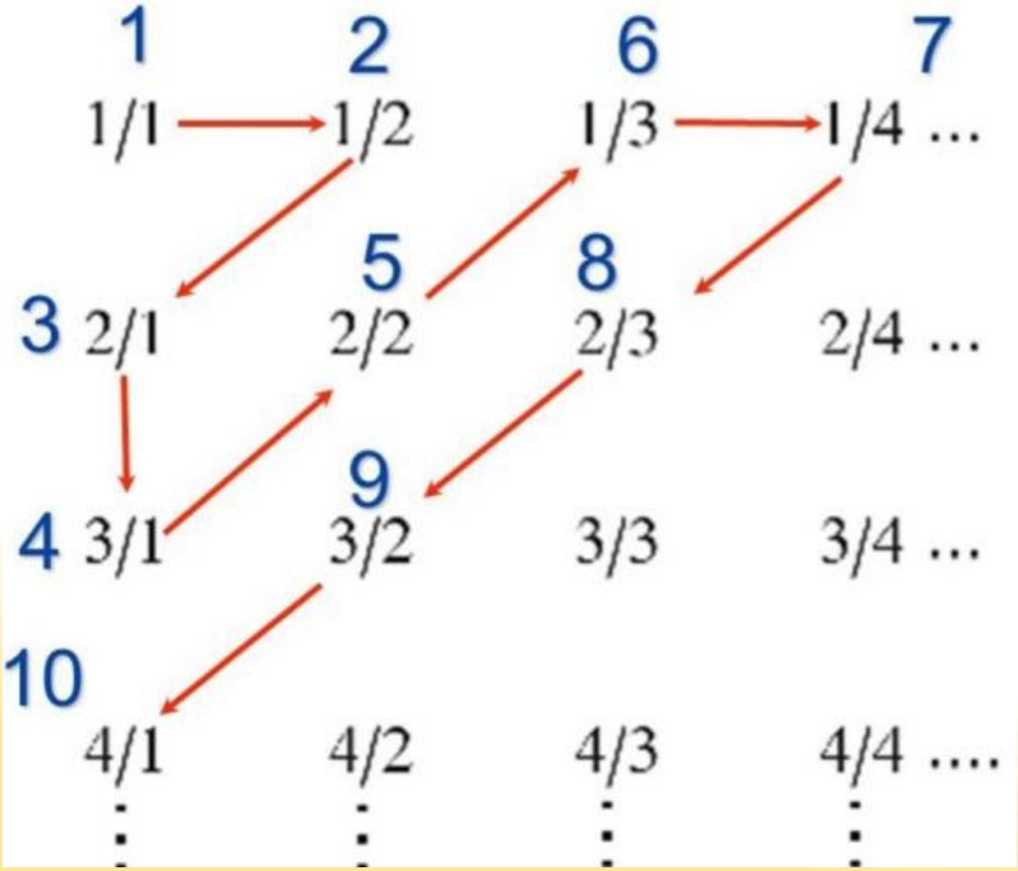
Più sorprendente ancora è che anche i numeri razionali Q possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i naturali.

Q ha quindi la cardinalità del numerabile.

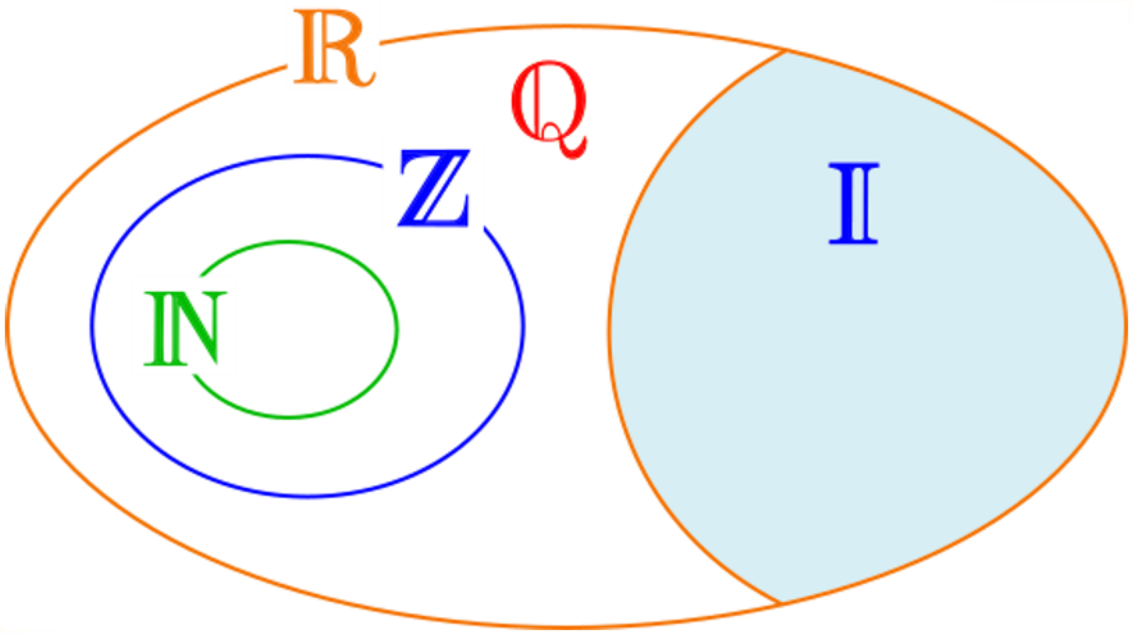


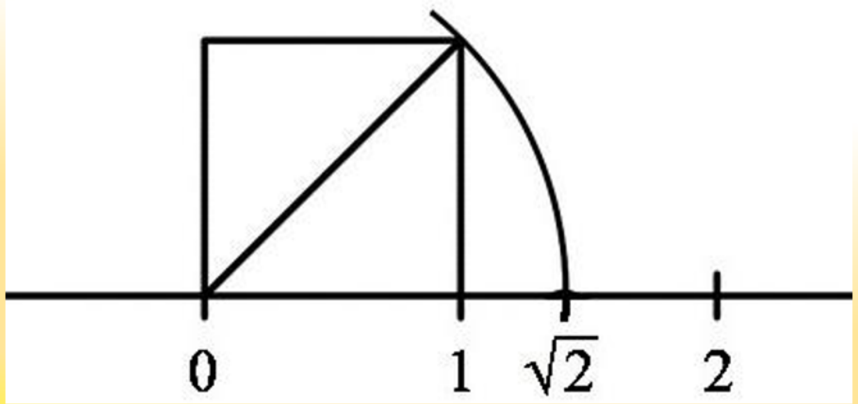
Procedimento diagonale di Cantor

La dimostrazione venne effettuata da Cantor attraverso il famoso procedimento diagonale: cioè si dispongono le frazioni come nella tabella qui raffigurata. Seguendo un percorso diagonale si può abbinare a ogni frazione un numero naturale procedendo all'infinito.



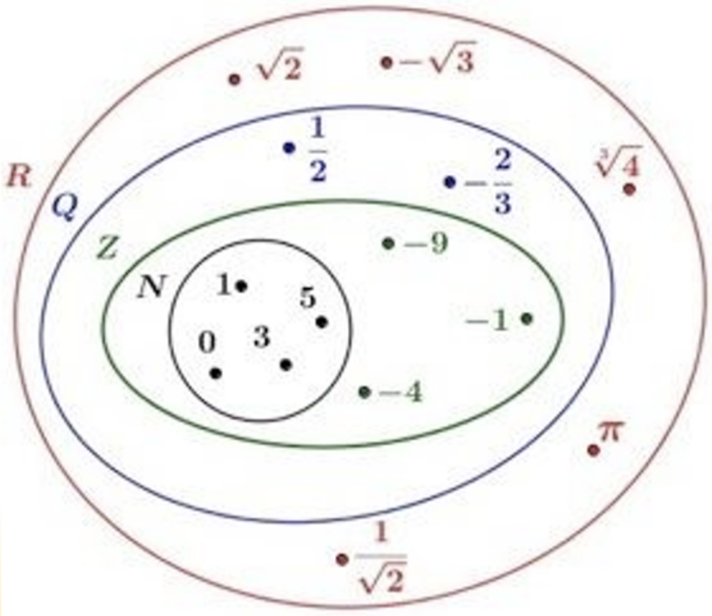
I numeri reali e il continuo lineare





I numeri razionali non coprono la retta.
È noto che numeri irrazionali come √2 o π non possono essere scritti come frazione ma corrispondono a punti della retta orientata.
Cantor dimostrò che i numeri irrazionali sono molti di più dei numeri razionali e che la cardinalità dell'insieme dei numeri reali è maggiore di Alef 0.
R ha la **potenza del continuo**
(è rappresentabile mediante i punti della retta che è una linea continua).

La potenza del continuo

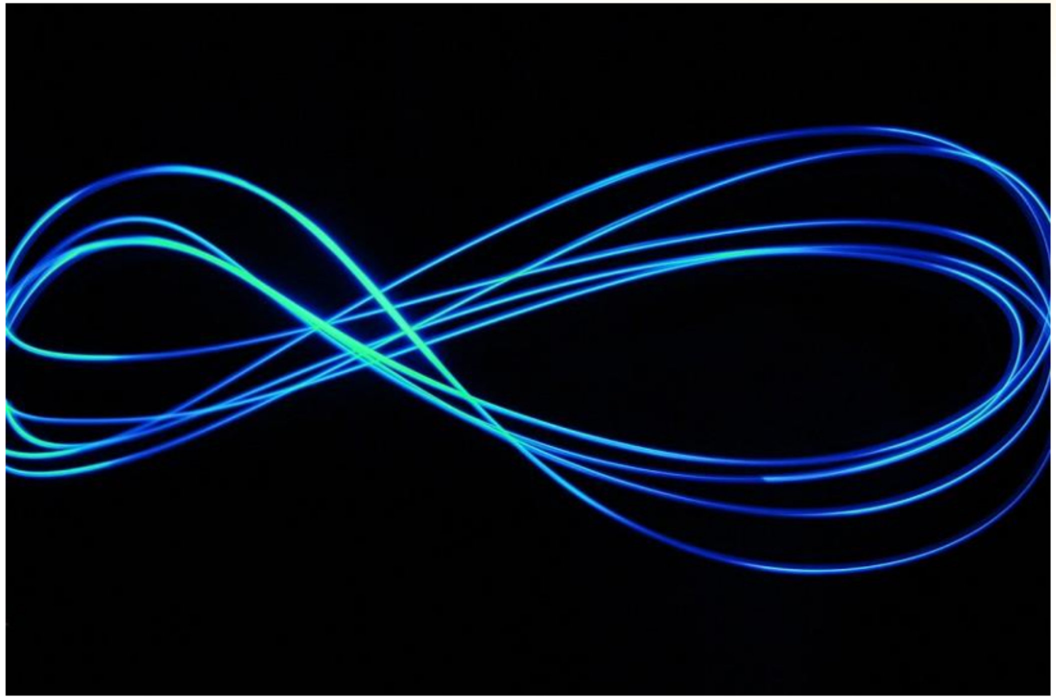


Un teorema di Cantor afferma che la potenza di un insieme I è minore di quella dell'insieme delle parti di I, vale a dire l'insieme di tutti i sottoinsiemi di I, compresi I e l'insieme vuoto.
Se I ha N elementi, l'insieme delle parti ha 2^N elementi, allora: N < 2^N.
Così, per esempio la potenza di N, cioè $\aleph_0$, è minore di quella dell'insieme delle parti di N e la potenza dell'insieme delle parti di N corrisponde ad $\aleph_1$(Alef uno).
$\aleph_1$ è uguale alla cardinalità dell'insieme R (costituito da tutti i numeri reali).
Quindi $\aleph_0 < \aleph_1$.
Considerando la potenza dell'insieme delle parti di R, si ottiene un numero transfinito più ancora più grande; questo è indicato con il simbolo $\aleph_2$; e così di seguito.

Tra questi due ordini di infinito…cosa c'è?

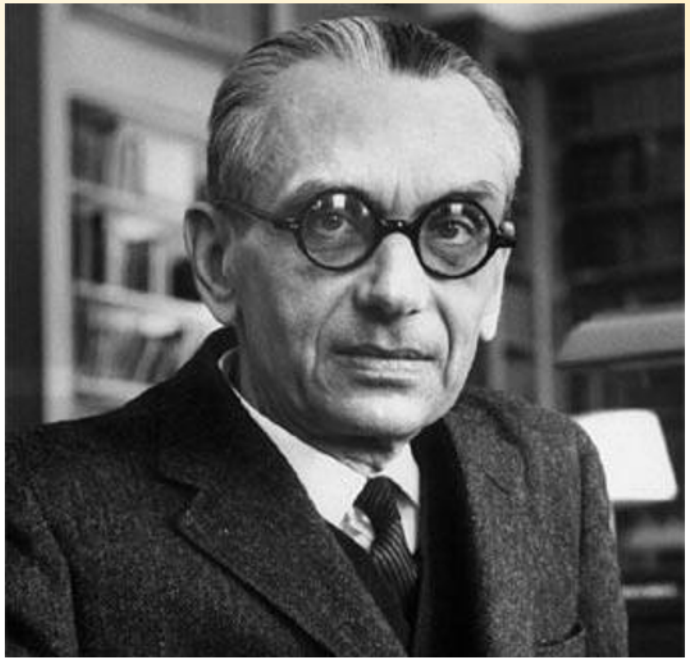
Cantor si chiese se esistano numeri cardinali intermedi tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$, e, più in generale, tra $\aleph_n$ e $\aleph_{n+1}$.

Non riuscendo a risolvere tale problema, formulò una congettura, nota come "**ipotesi cantoriana del continuo**" in base alla quale si suppone che non esistano cardinalità intermedie tra il numerabile e il continuo.



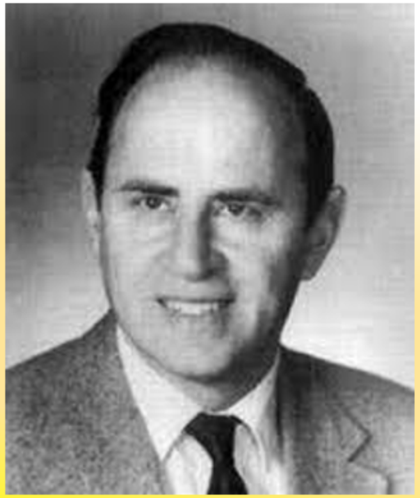
Solo nel 1938 Kurt Gödel poté dimostrare che questa ipotesi è compatibile con le varie assiomatizzazioni della teoria degli insiemi.

Infine, nel 1963 Paul Cohen dimostrò che in base a queste assiomatizzazioni non è decidibile se esistano o meno potenze intermedie tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$.



Kurt Gödel

1906-1978



Paul Cohen

1934-2007

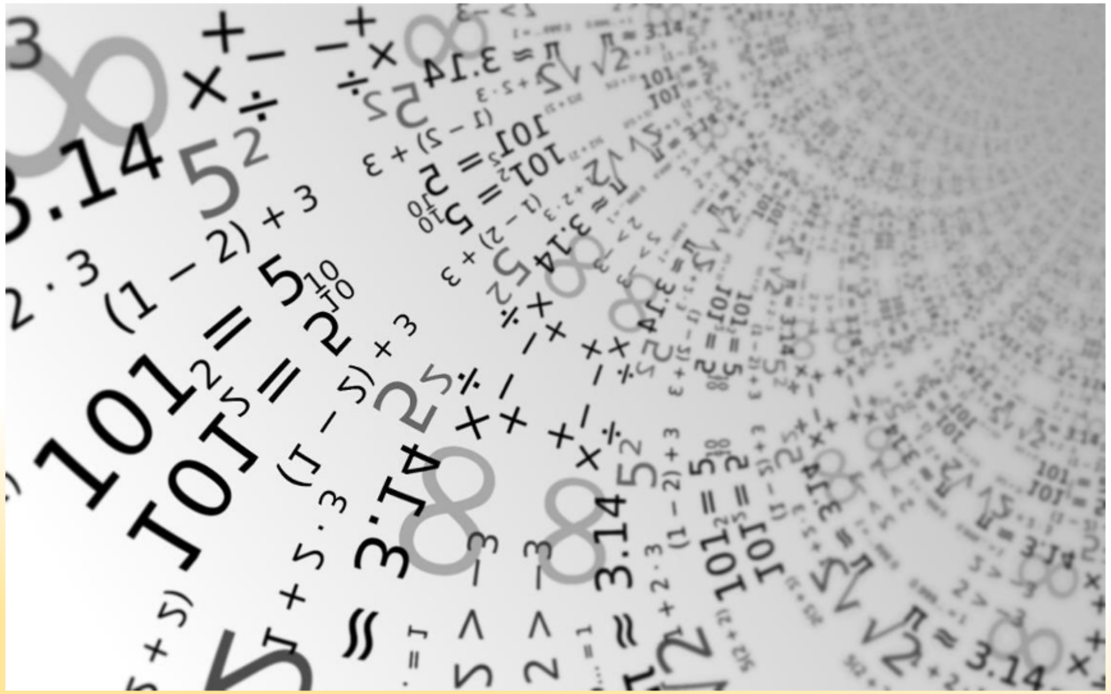
Matematica contro l'intuizione

Cantor, addentrandosi nell'infinito numerico, sfidò il pensare comune, affermando che un insieme potesse contenere tanti elementi quanti un suo sottoinsieme e che non tutti gli infiniti sono uguali.

Era proprio questa possibilità di viaggiare con la mente, concessagli dalla sua disciplina, a piacere maggiormente allo studioso.

Lo espresse affermando che:

"**L'essenza della matematica è la sua libertà**".



Bibliografia-sitografia

Stewart, I numeri uno, Einaudi 2018, Enciclopedia Treccani,
https://lunadinverno.it/cabala-ghematria/
https://matematicare223746899.wordpress.com/2019/06/21/le-cardinalita-degli-insiemi-numerici/
https://www.matmedia.it/lipotesi-del-continuo/
https://it.wikipedia.org/wiki/Cardinalit%C3%A0
https://www.youmath.it/formulari/formulari-insiemistica/1586-cardinalita-di-un-insieme.html

A cura di Lorenzo Gertosio e Luca Oddenino
Classe 3A, Liceo Classico e Scientifico "S.Pellico-G.Peano"