ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

Definizione

Un insieme non vuoto **V** è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali R se:

1) è possibile definire una operazione interna di somma tra vettori dello spazio **V** tale che (**V**, +) è un gruppo commutativo, cioè:
- vale la proprietà associativa: **(u + v) + w = u + (v + w)**
- esiste l'elemento neutro rispetto alla somma: **0 =** vettore nullo
- per ogni elemento **u** dello spazio, esiste l'elemento inverso – **u** tale che **u + (-u) = 0**
- vale la proprietà commutativa per la somma: **u + v = v + u.**

2) e' possibile definire una operazione di prodotto per scalare:
a **u,** con a appartenente ad R ed **u** appartenente a **V** che gode delle proprietà:
- a **(u + v) =** a**u +** a**v**
- (a + b) **u =** a**u +** b**u**
- a(b**u**) = (ab)**u**
- 1 **u** = **u**

Combinazione lineare di vettori- dipendenza e indipendenza lineare

Dati n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots \mathbf{u}_N$, e N numeri reali a,b,c… si dice combinazione lineare degli N vettori il vettore:
$a\,\mathbf{u}_1 + b\,\mathbf{u}_2 + c\,\mathbf{u}_3 \dots\dots + k\,\mathbf{u}_N$
Se esiste una combinazione lineare degli N vettori, con coefficienti non tutti nulli, tale che
$a\,\mathbf{u}_1 + b\,\mathbf{u}_2 + c\,\mathbf{u}_3 \dots\dots + k\,\mathbf{u}_N = \mathbf{0}$, si dice che i vettori $\mathbf{u}_n$ sono **linearmente dipendenti.**
Ciò equivale a dire che ognuno dei vettori può essere espresso come combinazione lineare degli altri.
Se viceversa la condizione: $a\,\mathbf{u}_1 + b\,\mathbf{u}_2 + c\,\mathbf{u}_3 \dots\dots + k\,\mathbf{u}_N = \mathbf{0}$ è verificata solo se i coefficienti sono tutti nulli, i vettori sono **linearmente indipendenti**.
La **dimensione** di uno spazio vettoriale è il numero massimo possibile di vettori linearmente indipendenti.
(Ad esempio nello spazio bidimensionale, cioè il piano, si hanno al massimo due vettori linearmente indipendenti, cioè non paralleli, un terzo vettore infatti può essere sempre espresso come combinazione lineare di due vettori linearmente indipendenti.
Pensando ai versori degli assi, ad esempio:
u = 3 **i** + 4 **j** equivale a **u -** 3 **i** + 4 **j** **= 0,** che è una combinazione lineare con coefficienti tutti diversi da 0.
Nello spazio tridimensionale, il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è 3, cioè quattro vettori sono sempre linearmente dipendenti.)

SPAZIO E3

Nello spazio tridimensionale qualunque terna di vettori linearmente indipendenti (cioè non complanari) può costituire una **base** dello spazio vettoriale, cioè ogni vettore dello spazio può essere scritto come combinazione lineare dei tre vettori della base.
La base più semplice da utilizzare è la **base ortonormale (i, j, k)** costituita dai tre versori (vettori unitari) degli assi cartesiani.

$$\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1 \qquad \bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{i}\cdot\bar{k} = 0 \qquad \bar{i}\times\bar{j} = \bar{k};\ \bar{j}\times\bar{k} = \bar{i};\ \bar{k}\times\bar{i} = \bar{j}$$

Ogni vettore **u** dello spazio vettoriale tridimensionale potrà essere scritto come:
$\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$
dove u_1, u_2, u_3, numeri reali, sono detti componenti del vettore.

Operazioni con i vettori

Prodotto scalare o interno:
è il numero dato da

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = uv \cos \alpha$$

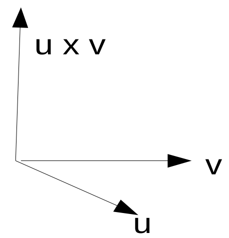
E' commutativo.
In componenti:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Condizione di perpendicolarità di due vettori: $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$

Prodotto vettoriale o esterno:
è il vettore di modulo

$$\left| \overline{u} \times \overline{v} \right| = uvsen\alpha$$



avente direzione ortogonale al piano di **u** e **v**, verso tale che il vettore personificato vede il primo vettore u ruotare in senso antiorario per sovrapporsi al secondo.

Il modulo del prodotto vettoriale rappresenta l'area del parallelogrammo di lati **u** e **v**.

Non è commutativo: $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$

In componenti:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

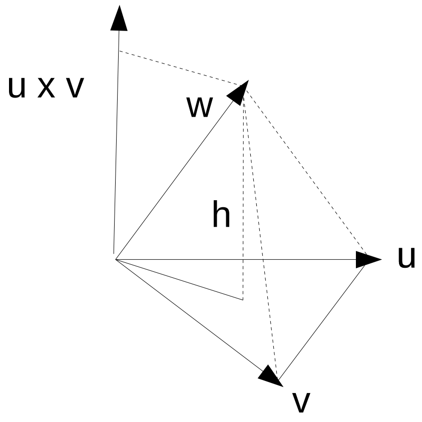
Condizione di parallelismo tra vettori è $\overline{u} \times \overline{v} = 0$

Prodotto misto

E' il numero dato da:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} \times \overline{w} = \overline{u} \times \overline{v} \cdot \overline{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

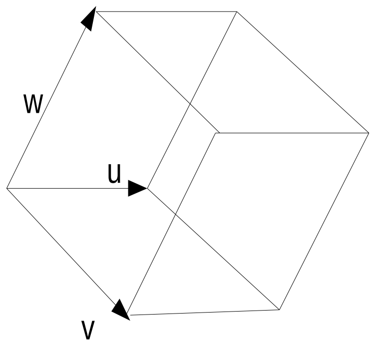
Il prodotto non cambia scambiando tra loro il segno $\times$ col segno $\cdot$



Si può verificare facilmente che il numero dato dal prodotto misto rappresenta il sestuplo del volume del tetraedro che ha come spigoli i tre vettori.
Il prodotto vettoriale rappresenta il doppio dell'area del triangolo di base.
L'altezza h è la proiezione del vettore **w** nella direzione del vettore **u** x **v**.
Quindi il prodotto scalare tra **u** x **v** e **w** è uguale a:

$$\left|\overline{u}\times\overline{v}\right|\cdot h = 2Abase\times h = 6Volume$$

Oppure:



Il prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo avente i tre vettori come spigoli.

E' immediato quindi che l'annullarsi del prodotto misto sia condizione di complanarità di tre vettori.
D'altronde se i tre vettori sono complanari, significa che non sono linearmente indipendenti, quindi ognuno dei tre può essere espresso come combinazione lineare degli altri due. Per le proprietà dei determinanti si ha allora che una riga è combinazione lineare delle altre due e il determinante è zero.

Proprietà del prodotto misto:

$$\overline{u}\times\overline{v}\cdot\overline{w} = \overline{w}\times\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{v}\times\overline{w}\cdot\overline{u}$$

Il prodotto misto non cambia permutando i vettori circolarmente tra loro.

Vale inoltre la seguente identità (teorema del doppio prodotto esterno)

$$\left(\overline{u}\times\overline{v}\right)\times\overline{w} = \left(\overline{u}\cdot\overline{w}\right)v - \left(\overline{v}\cdot\overline{w}\right)u$$