CALCOLO COMBINATORIO

Disposizioni semplici di n oggetti presi k a k

Def. Dati n elementi distinti si dice "disposizione semplice" degli n elementi presi k a k (k<n), o di classe k, un gruppo ordinato di k degli n elementi dati.

Due disposizioni si ritengono diverse se differiscono almeno per un elemento o per l'ordine degli elementi.

Teorema: Il numero delle disposizioni semplici di n elementi distinti, della classe k, è:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempi:

- Quante bandiere tricolori a bande verticali si possono fare con 5 colori?
- In quanti modi posso disporre i 30 alunni di una classe in banchi da due?

Disposizioni con ripetizione

Def. Dati n elementi distinti, si dice disposizione con ripetizione degli n elementi presi k a k (k qualunque), un gruppo ordinato formato con k degli n elementi, potendo uno stesso elemento figurare nel gruppo fino a k volte.

Teorema: Il numero delle disposizioni con ripetizione di n elementi distinti della classe k è:

$$D^{r}_{n,k} = n^{k}$$

Esempi:

- Qual è il numero delle possibili colonne che si possono comporre nel gioco del totocalcio?
- Quanti sono i numeri di tre cifre che posso scrivere con i numeri 1,2,3,4,5?

Permutazioni semplici

Def. Si chiamano permutazioni semplici di n elementi distinti le disposizioni semplici degli n elementi, presi n ad n.

Teorema: Il numero delle permutazioni di n elementi è:

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Esempi:

- Quanti anagrammi posso fare con la parola "amore"?
- In quanti modi si possono disporre 7 persone in 7 sedie allineate?

(Osservazione: se le sedie fossero in circolo si parlerebbe di "**permutazione circolare**" e il numero di possibili disposizioni sarebbe (n-1)! essendo la disposizione invariante per rotazione)

Permutazioni con ripetizione

Sono le permutazioni di n elementi di cui k, h …ripetuti:

$$P_n^{h,k..} = \frac{n!}{h!k!\ldots}$$

Esempio:

- Quanti anagrammi posso fare con la parola "notte"? Essendo la "t" ripetuta due volte….

Combinazioni semplici

Def. Dati n elementi distinti si chiama combinazione semplice degli n elementi presi k a k, un qualunque gruppo formato da k degli n elementi dati.

Due combinazioni si ritengono distinte quando differiscono tra loro per almeno un elemento (non conta l'ordine...), pertanto il numero delle combinazioni sarà pari a quello delle disposizioni diviso il numero delle permutazioni di k elementi.

Teorema: Il numero delle combinazioni semplici di n elementi distinti presi k a k, è:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Esempi:

- Quante terne si dovrebbero giocare al lotto per vincere sicuramente?
- Quanti tipi di macedonia con 4 frutti posso fare avendo pere, mele, banane, fragole, lamponi e ananas?

Il simbolo

$$\binom{n}{k}$$

si chiama *"coefficiente binomiale"* (vedi dopo) e gode di varie proprietà:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(dimostrare)

In particolare:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Formula di Stifel:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(dimostrare)

Teorema: formula del binomio di Newton

I coefficienti binomiali rappresentano i coefficienti dei monomi del polinomio dato dalla potenza ennesima di un qualsiasi binomio (a + b):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Caso particolare:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

che rappresenta il numero totale di sottoinsiemi di un insieme di n elementi (insieme delle parti).

Combinazioni con ripetizione

Le combinazioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k sono tutti i gruppi che si possono formare con k elementi presi tra gli n, potendo ripetere ogni elemento fino a k volte.

$$C_{n,k}^{\ r} = \binom{n+k-1}{k}$$

- In quanti modi posso sistemare otto palline identiche in tre scatole identiche?